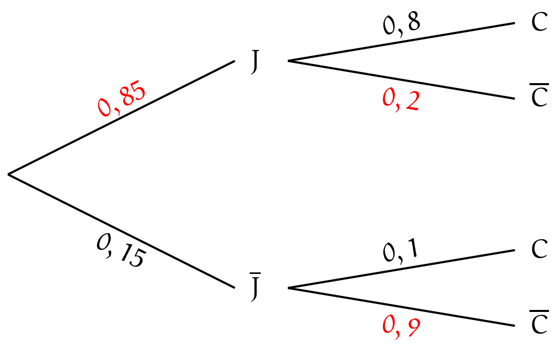
Antilles Guyane 2014. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) La probabilité demandée est $p\left(\overline{J}\cap C\right)$.

$$p\left(\overline{J}\cap C\right) = p\left(\overline{J}\right)\times p_{\overline{J}}(C) = 0,15\times 0,1 = 0,015.$$

$$\boxed{\text{La probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n}^{\text{o}}\,3\text{ est égale à } 0,015.}$$

c) La probabilité demandée est $p(C)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}p(C) &= p(J\cap C) + p\left(\overline{J}\cap C\right) = p(J)\times p_J(C) + p\left(\overline{J}\right)\times p_{\overline{J}}(C)\\ &= 0,85\times 0,8 + 0,15\times 0,1 = 0,695.\end{aligned}$$

$$\boxed{p(C) = 0,695.}$$

d) La probabilité demandée est $p_C\left(\overline{J}\right)$.

$$p_C\left(\overline{J}\right) = \frac{p\left(\overline{J}\cap C\right)}{p(C)} = \frac{p\left(\overline{J}\right)\times p_{\overline{J}}(C)}{p(C)} = \frac{0,15\times 0,1}{0,695} = 0,0216 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

$$\boxed{p_C\left(\overline{J}\right) = 0,0216 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

2) a) La probabilité demandée est $P(87\leqslant X\leqslant 89)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{P(87\leqslant X\leqslant 89) = 0,2417 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

b) La calculatrice fournit $P(X\geqslant 91) = 1 - P(X\leqslant 91) = 0,3085$ arrondi à 10^{-4}.

$$\boxed{P(X\geqslant 91) = 0,3085 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

Partie B

1) Ici, $n = 120$ et on suppose que $p = 0,6$. On note tout d'abord que $n\geqslant 30$. Ensuite, $np = 72$ et donc $np\geqslant 5$ et $n(1-p) = 48$ et donc $n(1-p)\geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,6 - 1,96\frac{\sqrt{0,6\times 0,4}}{\sqrt{120}}, p + 1,96\frac{\sqrt{0,6\times 0,4}}{\sqrt{120}}\right].$$

En arrondissant de manière à élargir un peu, on obtient l'intervalle $[0,5123; 0,6877]$.

2) La fréquence observée est $f = \dfrac{65}{120} = 0,54\ldots$ Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation. Donc, le restaurateur peut accepter l'affirmation de l'ostréiculteur mais il ne connaît pas le risque de se tromper.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

EXERCICE 2

Partie A

1) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$g'(x) = -1 + e^x.$$

Pour tout réel x strictement négatif, on a $e^x < 1$ et donc $g'(x) < 0$ et pour tout réel strictement positif x, on a $e^x > 1$ et donc $g'(x) > 0$. On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. En tenant compte de $g(0) = 1 - 0 + e^0 = 2$, on en déduit le tableau de variations de f.

Tableau de variations de g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$\searrow$		2		$\nearrow$

En particulier, la fonction g admet un minimum en 0 et ce minimum est égal à 2. Puisque ce minimum est strictement positif, on en déduit que la fonction g est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2) Limite de f en $-\infty$. Pour tout réel x, $x + \dfrac{x}{e^x} = x\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right) = x\left(e^{-x} + 1\right)$.

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} + 1 = +\infty$ et d'autre part, $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(e^{-x} + 1\right) = -\infty$ puis

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.}$$

Limite de f en $+\infty$. Pour tout réel non nul x, $\dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{e^x/x}$.

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. En prenant l'inverse, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

3) Pour tout réel x, $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 + 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}\left(e^x + 1 - x\right) = e^{-x}g(x).$$

4) Pour tout réel x, on a $e^{-x} > 0$. D'autre part, d'après la question 1), pour tout réel x, on a $g(x) > 0$. On en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On sait alors que pour tout réel k de $\left]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
En particulier, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.

De plus $f(-1) = -e^{-1} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$. Par suite, $f(-1) < f(\alpha) < f(0)$. Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $-1 < \alpha < 0$.

6) a) Une équation de la droite T est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = e^0 g(0) = 2$. Donc, une équation de la droite T est $y = 2x + 1$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

b) La position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T est donnée par le signe de $f(x) - (2x+1)$. Pour tout réel x,

$$f(x) - (2x+1) = x + 1 + \frac{x}{e^x} - (2x+1) = -x + xe^{-x} = x\left(e^{-x} - 1\right).$$

Si $x < 0$, on a $-x > 0$ puis $e^{-x} > 1$ et donc $e^{-x} - 1 > 0$. Mais alors $f(x) - (2x+1) < 0$.
Si $x > 0$, on a $-x < 0$ puis $e^{-x} < 1$ et donc $e^{-x} - 1 < 0$. Mais alors $f(x) - (2x+1) < 0$.

Ainsi, pour tout réel x non nul, $f(x) - (2x+1) < 0$. On en déduit que $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de T sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Enfin, $\mathscr{C}$ et T ont en commun le point de coordonnées $(0, 1)$.

Partie B

1) La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

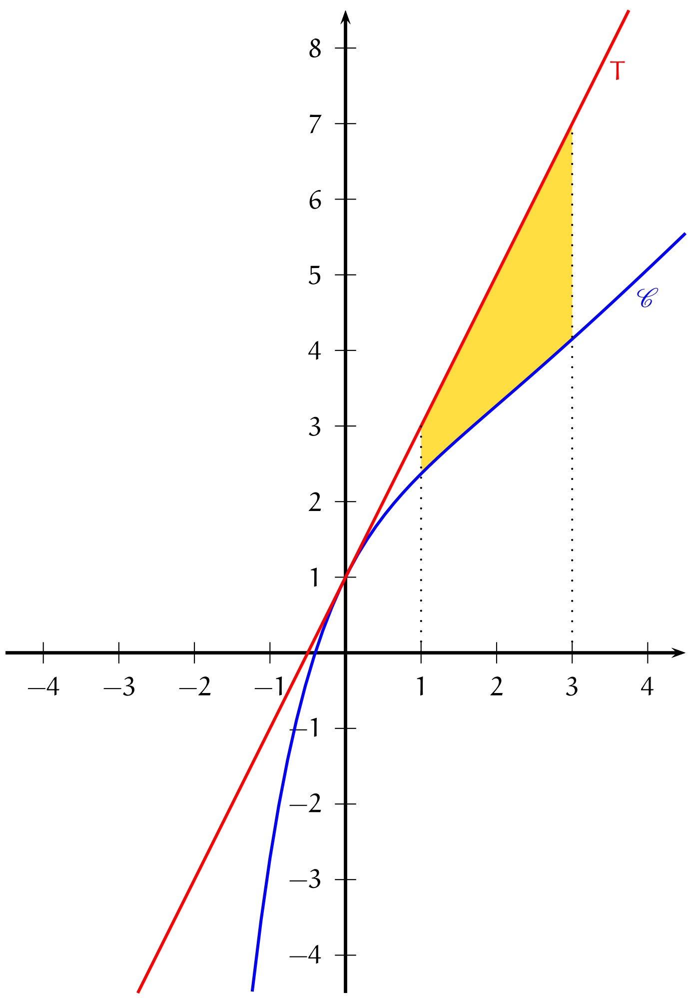
$$H'(x) = (-1)e^{-x} + (-x-1) \times (-1) \times e^{-x} = (-1 + x + 1)e^{-x} = xe^{-x}.$$

Donc la fonction H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.

2) La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de T sur l'intervalle $[1, 3]$. Donc l'aire demandée est

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_1^3 ((2x+1) - f(x))\ dx = \int_1^3 \left(x - xe^{-x}\right)\ dx = \int_1^3 (x - h(x))\ dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - H(x)\right]_1^3 = \left(\frac{3^2}{2} - (-3-1)e^{-3}\right) - \left(\frac{1^2}{2} - (-1-1)e^{-1}\right) \\ &= 4 + 4e^{-3} - 2e^{-1}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 4 + 4e^{-3} - 2e^{-1}.}$$



 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

EXERCICE 3 : corrigé

Proposition 1	**FAUX**
Proposition 2	**VRAI**
Proposition 3	**FAUX**
Proposition 4	**FAUX**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(1\ ;\ 2\ ;\ 5)$, $B(-1\ ;\ 6\ ;\ 4)$, $C(7\ ;\ -10\ ;\ 8)$ et $D(-1\ ;\ 3\ ;\ 4)$.

Justification 1 : Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives les points $(1\ ;\ 2\ ;\ 5)$, $(-1\ ;\ 6\ ;\ 4)$ et $(7\ ;\ -10\ ;\ 8)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-2, 4, -1)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(6, -12, 3)$.
On note alors que $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$. Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ou encore les points A, B et C sont alignés.
On sait alors que les points A, B et C ne définissent pas un unique plan. La proposition 1 est fausse.

Justification 2 : Soit (P) le plan d'équation cartésienne $x - 2z + 9 = 0$.

- $x_A - 2z_A + 9 = 1 - 10 + 9 = 0$. Donc le point A appartient au plan (P).
- $x_B - 2z_B + 9 = -1 - 8 + 9 = 0$. Donc le point B appartient au plan (P).
- $x_D - 2z_D + 9 = -1 - 8 + 9 = 0$. Donc le point D appartient au plan (P).

Les points A, B et D appartiennent au plan (P). Puisque les points A, B et D définissent un unique plan, une équation cartésienne du plan (ABD) est $x - 2z + 9 = 0$. La proposition 2 est vraie.

Justification 3 : S'il existe un réel t tel que

$$\left\{\begin{array}{l} x_A = \dfrac{3}{2}t - 5 \\ y_A = -3t + 14 \\ z_A = -\dfrac{3}{2}t + 2 \end{array}\right.,$$

alors en particulier, $-\dfrac{3}{2}t + 2 = 5$ et donc $t = -2$ et aussi $-3t + 14 = 2$ et donc $t = 4$. Ceci est impossible et donc le point A n'appartient pas à la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2}t - 5 \\ y = -3t + 14 \\ z = -\dfrac{3}{2}t + 2 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. La proposition 3 est fausse.

Justification 4 : Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\vec{n}(2, -1, 5)$ et un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$ est le vecteur $\vec{n'}(-3, -1, 1)$.
Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires et donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles. La proposition 4 est fausse.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

EXERCICE 4 (candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

1) a) Tableau de valeurs.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,18	0,61	0,30	0,15	0,07	0,03

b) Il semble que la suite (u_n) soit décroissante à partir du rang 1.

2) a) Montrons par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, on a $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n$.

- Pour $n = 1$, $u_1 = 3,4$ et $\frac{15}{4} \times 0,5^1 = 1,875$. Donc, $u_1 \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^1$. L'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^{n+1}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n \\
&\geqslant \frac{1}{5} \times \frac{15}{4} \times 0,5^n + 3 \times 0,5^n \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \left(\frac{3}{4} + 3\right) \times (0,5)^n \\
&= \frac{15}{4} \times 0,5^n.
\end{aligned}$$

D'autre part, $\frac{15}{4} \times 0,5^{n+1} = \frac{15}{4} \times 0,5 \times 0,5^n \leqslant \frac{15}{4} \times 1 \times 0,5^n = \frac{15}{4} \times 0,5^n$. Ainsi, $u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n$ et $\frac{15}{4} \times 0,5^n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^{n+1}$. Par suite, $u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^{n+1}$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul, } u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n.}$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n - u_n = -\frac{4}{5}u_n + 3 \times 0,5^n = \frac{4}{5}\left(-u_n + 3 \times \frac{5}{4} \times 0,5^n\right) \\
&= \frac{4}{5}\left(\frac{15}{4} \times 0,5^n - u_n\right).
\end{aligned}$$

Puisque n, est un entier naturel non nul, d'après la question précédente, $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n$ et donc $\frac{15}{4} \times 0,5^n - u_n \leqslant 0$ puis $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

c) La question 2) a) permet en particulier d'affirmer que la suite (u_n) est positive et la question 2) b) permet d'affirmer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang et est minorée par 0. On en déduit que la suite (u_n) est convergente.

3) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \times 0,5^{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n - 10 \times 0,5 \times 0,5^n \\
&= \frac{1}{5}\left(v_n + 10 \times 0,5^n\right) + 3 \times 0,5^n - 5 \times 0,5^n \\
&= \frac{1}{5}v_n + 2 \times 0,5^n - 2 \times 0,5^n = \frac{1}{5}v_n.
\end{aligned}$$

Donc, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. De plus, $v_0 = u_0 - 10 \times 0,5^0 = 2 - 10 = -8$.

Donc, la suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = -8$ et de raison $\frac{1}{5}$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

b) On sait alors que pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 \times q^n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$u_n = v_n + 10 \times 0,5^n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.}$$

c) Puisque $-1 < \frac{1}{5} < 1$ et que $-1 < 0,5 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$. Mais alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -8 \times 0 + 10 \times 0 = 0$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

4)Algorithme complété. Il faut d'abord inverser deux lignes de l'algorithme pour plus de cohérence.

Entrée	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
Traitement	Tant que $u > 0,01$ u prend la valeur $\frac{1}{5}u + 3 \times 0,5^n$ n prend la valeur $n + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

Si on ne modifie l'ordre des lignes alors il faut écrire :

Entrée	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
Traitement	Tant que $u > 0,01$ n prend la valeur $n + 1$ u prend la valeur $\frac{1}{5}u + 3 \times 0,5^{n-1}$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.