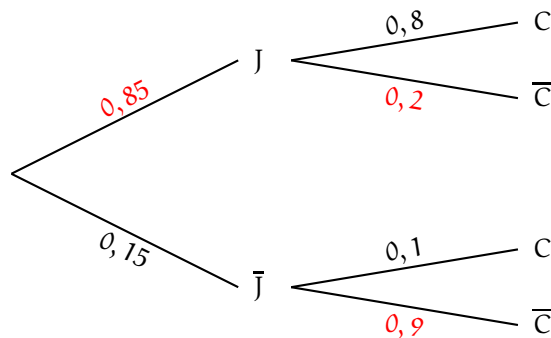


# Antilles Guyane 2014. Enseignement spécifique. Corrigé

## EXERCICE 1

### Partie A

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) La probabilité demandée est  $p(\bar{J} \cap C)$ .

$$p(\bar{J} \cap C) = p(\bar{J}) \times p_{\bar{J}}(C) = 0,15 \times 0,1 = 0,015.$$

La probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3 est égale à 0,015.

c) La probabilité demandée est  $p(C)$ . D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(C) &= p(J \cap C) + p(\bar{J} \cap C) = p(J) \times p_J(C) + p(\bar{J}) \times p_{\bar{J}}(C) \\ &= 0,85 \times 0,8 + 0,15 \times 0,1 = 0,695. \end{aligned}$$

$$p(C) = 0,695.$$

d) La probabilité demandée est  $p_C(\bar{J})$ .

$$p_C(\bar{J}) = \frac{p(\bar{J} \cap C)}{p(C)} = \frac{p(\bar{J}) \times p_{\bar{J}}(C)}{p(C)} = \frac{0,15 \times 0,1}{0,695} = 0,0216 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

$$p_C(\bar{J}) = 0,0216 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

2) a) La probabilité demandée est  $P(87 \leq X \leq 89)$ . La calculatrice fournit

$$P(87 \leq X \leq 89) = 0,2417 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

b) La calculatrice fournit  $P(X \geq 91) = 1 - P(X \leq 91) = 0,3085$  arrondi à  $10^{-4}$ .

$$P(X \geq 91) = 0,3085 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

### Partie B

1) Ici,  $n = 120$  et on suppose que  $p = 0,6$ . On note tout d'abord que  $n \geq 30$ . Ensuite,  $np = 72$  et donc  $np \geq 5$  et  $n(1-p) = 48$  et donc  $n(1-p) \geq 5$ . Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire  $F$  est

$$\left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[ 0,6 - 1,96 \frac{\sqrt{0,6 \times 0,4}}{\sqrt{120}}, p + 1,96 \frac{\sqrt{0,6 \times 0,4}}{\sqrt{120}} \right].$$

En arrondissant de manière à élargir un peu, on obtient l'intervalle  $[0,5123; 0,6877]$ .

2) La fréquence observée est  $f = \frac{65}{120} = 0,54\dots$  Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation. Donc, le restaurateur peut accepter l'affirmation de l'ostréiculteur mais il ne connaît pas le risque de se tromper.

## EXERCICE 2

### Partie A

1) La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ . De plus, pour tout réel  $x$ ,

$$g'(x) = -1 + e^x.$$

Pour tout réel  $x$  strictement négatif, on a  $e^x < 1$  et donc  $g'(x) < 0$  et pour tout réel strictement positif  $x$ , on a  $e^x > 1$  et donc  $g'(x) > 0$ . On en déduit que la fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, 0]$  et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ . En tenant compte de  $g(0) = 1 - 0 + e^0 = 2$ , on en déduit le tableau de variations de  $g$ .

Tableau de variations de  $g$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g$			

En particulier, la fonction  $g$  admet un minimum en  $0$  et ce minimum est égal à  $2$ . Puisque ce minimum est strictement positif, on en déduit que la fonction  $g$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .

2) **Limite de  $f$  en  $-\infty$ .** Pour tout réel  $x$ ,  $x + \frac{x}{e^x} = x \left( 1 + \frac{1}{e^x} \right) = x(e^{-x} + 1)$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$  puis  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + 1 = +\infty$  et d'autre part,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ . En multipliant, on obtient  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{-x} + 1) = -\infty$  puis

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

**Limite de  $f$  en  $+\infty$ .** Pour tout réel non nul  $x$ ,  $\frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^x/x}$ .

D'après un théorème de croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ . En prenant l'inverse, on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ . D'autre part,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$ . En additionnant, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3) Pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) = 1 + 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(e^x + 1 - x) = e^{-x}g(x).$$

4) Pour tout réel  $x$ , on a  $e^{-x} > 0$ . D'autre part, d'après la question 1), pour tout réel  $x$ , on a  $g(x) > 0$ . On en déduit que la fonction  $f'$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$  et donc que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Tableau de variations de  $f$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f$		

5) La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . On sait alors que pour tout réel  $k$  de  $] -\infty, +\infty[$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$ .

En particulier, l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution réelle  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ .

De plus  $f(-1) = -e^{-1} < 0$  et  $f(0) = 1 > 0$ . Par suite,  $f(-1) < f(\alpha) < f(0)$ . Puisque  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que  $-1 < \alpha < 0$ .

6) a) Une équation de la droite  $T$  est  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$  avec  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = e^0 g(0) = 2$ . Donc, une équation de la droite  $T$  est  $y = 2x + 1$ .

b) La position relative de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite  $T$  est donnée par le signe de  $f(x) - (2x + 1)$ . Pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) - (2x + 1) = x + 1 + \frac{x}{e^x} - (2x + 1) = -x + xe^{-x} = x(e^{-x} - 1).$$

Si  $x < 0$ , on a  $-x > 0$  puis  $e^{-x} > 1$  et donc  $e^{-x} - 1 > 0$ . Mais alors  $f(x) - (2x + 1) < 0$ .

Si  $x > 0$ , on a  $-x < 0$  puis  $e^{-x} < 1$  et donc  $e^{-x} - 1 < 0$ . Mais alors  $f(x) - (2x + 1) < 0$ .

Ainsi, pour tout réel  $x$  non nul,  $f(x) - (2x + 1) < 0$ . On en déduit que  $\mathcal{C}$  est strictement au-dessous de  $T$  sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ . Enfin,  $\mathcal{C}$  et  $T$  ont en commun le point de coordonnées  $(0, 1)$ .

## Partie B

1) La fonction  $H$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$

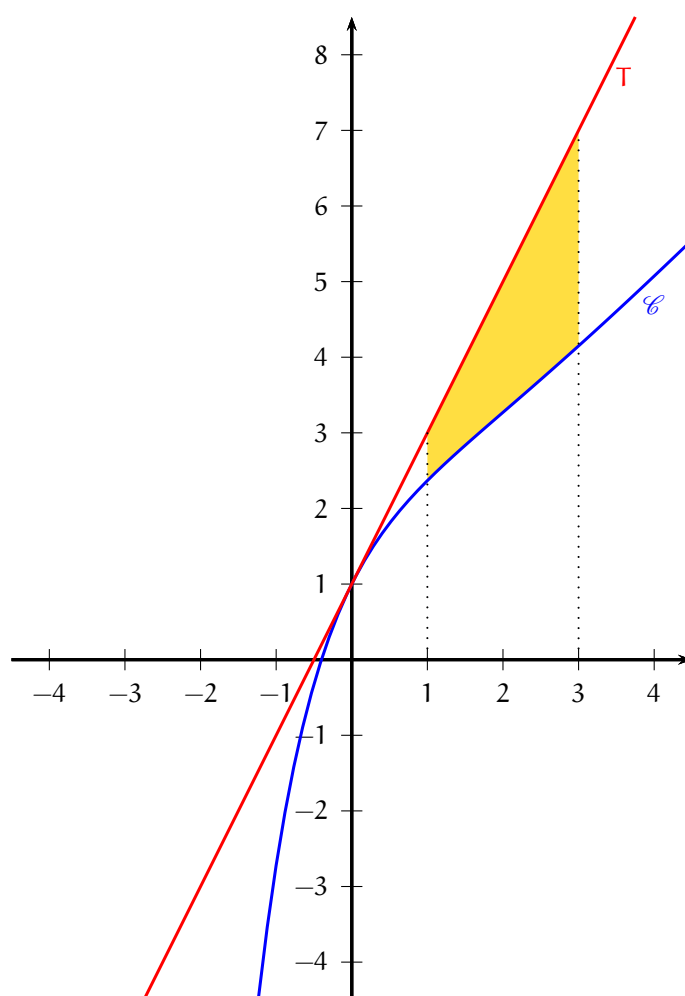
$$H'(x) = (-1)e^{-x} + (-x - 1) \times (-1) \times e^{-x} = (-1 + x + 1)e^{-x} = xe^{-x}.$$

Donc la fonction  $H$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $h$ .

2) La courbe  $\mathcal{C}$  est au-dessous de  $T$  sur l'intervalle  $[1, 3]$ . Donc l'aire demandée est

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^3 ((2x + 1) - f(x)) \, dx = \int_1^3 (x - xe^{-x}) \, dx = \int_1^3 (x - h(x)) \, dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} - H(x) \right]_1^3 = \left( \frac{3^2}{2} - (-3 - 1)e^{-3} \right) - \left( \frac{1^2}{2} - (-1 - 1)e^{-1} \right) \\ &= 4 + 4e^{-3} - 2e^{-1}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = 4 + 4e^{-3} - 2e^{-1}.$$



### EXERCICE 3 : corrigé

<b>Proposition 1</b>	<b>FAUX</b>
<b>Proposition 2</b>	<b>VRAI</b>
<b>Proposition 3</b>	<b>FAUX</b>
<b>Proposition 4</b>	<b>FAUX</b>

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(1 ; 2 ; 5)$ ,  $B(-1 ; 6 ; 4)$ ,  $C(7 ; -10 ; 8)$  et  $D(-1 ; 3 ; 4)$ .

**Justification 1 :** Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives les points  $(1 ; 2 ; 5)$ ,  $(-1 ; 6 ; 4)$  et  $(7 ; -10 ; 8)$ . Les coordonnées du vecteur  $\vec{AB}$  sont  $(-2, 4, -1)$  et les coordonnées du vecteur  $\vec{AC}$  sont  $(6, -12, 3)$ .

On note alors que  $\vec{AC} = -3\vec{AB}$ . Par suite, les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires ou encore les points A, B et C sont alignés.

On sait alors que les points A, B et C ne définissent pas un unique plan. La proposition 1 est fautive.

**Justification 2 :** Soit (P) le plan d'équation cartésienne  $x - 2z + 9 = 0$ .

- $x_A - 2z_A + 9 = 1 - 10 + 9 = 0$ . Donc le point A appartient au plan (P).
- $x_B - 2z_B + 9 = -1 - 8 + 9 = 0$ . Donc le point B appartient au plan (P).
- $x_D - 2z_D + 9 = -1 - 8 + 9 = 0$ . Donc le point D appartient au plan (P).

Les points A, B et D appartiennent au plan (P). Puisque les points A, B et D définissent un unique plan, une équation cartésienne du plan (ABD) est  $x - 2z + 9 = 0$ . La proposition 2 est vraie.

**Justification 3 :** S'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} x_A = \frac{3}{2}t - 5 \\ y_A = -3t + 14 \\ z_A = -\frac{3}{2}t + 2 \end{cases},$$

alors en particulier,  $-\frac{3}{2}t + 2 = 5$  et donc  $t = -2$  et aussi  $-3t + 14 = 2$  et donc  $t = 4$ . Ceci est impossible et donc le

point A n'appartient pas à la droite de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = \frac{3}{2}t - 5 \\ y = -3t + 14 \\ z = -\frac{3}{2}t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ . La proposition 3 est

fautive.

**Justification 4 :** Un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$  est le vecteur  $\vec{n}(2, -1, 5)$  et un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}'$  est le vecteur  $\vec{n}'(-3, -1, 1)$ .

Les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  ne sont pas colinéaires et donc les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  ne sont pas parallèles. La proposition 4 est fautive.

**EXERCICE 4 (candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)**

1) a) Tableau de valeurs.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$u_n$	2	3,4	2,18	1,18	0,61	0,30	0,15	0,07	0,03

b) Il semble que la suite  $(u_n)$  soit décroissante à partir du rang 1.2) a) Montrons par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a  $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$ .

- Pour  $n = 1$ ,  $u_1 = 3,4$  et  $\frac{15}{4} \times 0,5^1 = 1,875$ . Donc,  $u_1 \geq \frac{15}{4} \times 0,5^1$ . L'inégalité à démontrer est vraie quand  $n = 1$ .
- Soit  $n \geq 1$ . Supposons que  $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$  et montrons que  $u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times 0,5^{n+1}$ .

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n \\ &\geq \frac{1}{5} \times \frac{15}{4} \times 0,5^n + 3 \times 0,5^n \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \left(\frac{3}{4} + 3\right) \times (0,5)^n \\ &= \frac{15}{4} \times 0,5^n. \end{aligned}$$

D'autre part,  $\frac{15}{4} \times 0,5^{n+1} = \frac{15}{4} \times 0,5 \times 0,5^n \leq \frac{15}{4} \times 1 \times 0,5^n = \frac{15}{4} \times 0,5^n$ . Ainsi,  $u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$  et  $\frac{15}{4} \times 0,5^n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^{n+1}$ . Par suite,  $u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times 0,5^{n+1}$ .

On a montré par récurrence que

pour tout entier naturel non nul, $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$ .
--

b) Soit  $n$  un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n - u_n = -\frac{4}{5}u_n + 3 \times 0,5^n = \frac{4}{5} \left(-u_n + 3 \times \frac{5}{4} \times 0,5^n\right) \\ &= \frac{4}{5} \left(\frac{15}{4} \times 0,5^n - u_n\right). \end{aligned}$$

Puisque  $n$ , est un entier naturel non nul, d'après la question précédente,  $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$  et donc  $\frac{15}{4} \times 0,5^n - u_n \leq 0$  puis  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .

c) La question 2) a) permet en particulier d'affirmer que la suite  $(u_n)$  est positive et la question 2) b) permet d'affirmer que la suite  $(u_n)$  est décroissante à partir du rang 1.Ainsi, la suite  $(u_n)$  est décroissante à partir d'un certain rang et est minorée par 0. On en déduit que la suite  $(u_n)$  est convergente.3) a) Soit  $n$  un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \times 0,5^{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n - 10 \times 0,5 \times 0,5^n \\ &= \frac{1}{5}(v_n + 10 \times 0,5^n) + 3 \times 0,5^n - 5 \times 0,5^n \\ &= \frac{1}{5}v_n + 2 \times 0,5^n - 2 \times 0,5^n = \frac{1}{5}v_n. \end{aligned}$$

Donc, la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{5}$ . De plus,  $v_0 = u_0 - 10 \times 0,5^0 = 2 - 10 = -8$ .Donc, la suite  $(v_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $v_0 = -8$  et de raison  $\frac{1}{5}$ .

b) On sait alors que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$v_n = v_0 \times q^n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

On en déduit que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = v_n + 10 \times 0,5^n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n$ .

c) Puisque  $-1 < \frac{1}{5} < 1$  et que  $-1 < 0,5 < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$ . Mais alors,  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -8 \times 0 + 10 \times 0 = 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

4) **Algorithme complété.** Il faut d'abord inverser deux lignes de l'algorithme pour plus de cohérence.

<b>Entrée</b>	$n$ et $u$ sont des nombres
<b>Initialisation :</b>	$n$ prend la valeur 0
<b>Traitement</b>	Tant que $u > 0,01$ $u$ prend la valeur $\frac{1}{5}u + 3 \times 0,5^n$ $n$ prend la valeur $n + 1$ Fin tant que
<b>Sortie</b>	Afficher $n$

Si on ne modifie l'ordre des lignes alors il faut écrire :

<b>Entrée</b>	$n$ et $u$ sont des nombres
<b>Initialisation :</b>	$n$ prend la valeur 0
<b>Traitement</b>	Tant que $u > 0,01$ $n$ prend la valeur $n + 1$ $u$ prend la valeur $\frac{1}{5}u + 3 \times 0,5^{n-1}$ Fin tant que
<b>Sortie</b>	Afficher $n$