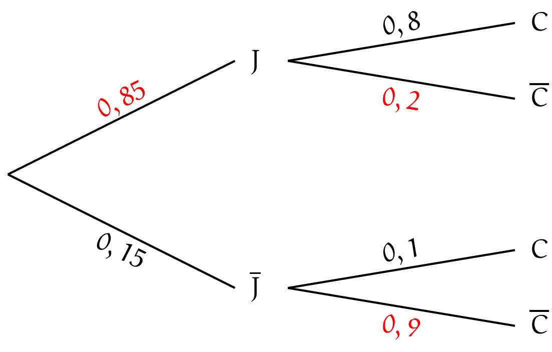
Antilles Guyane 2014. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) La probabilité demandée est $p\left(\overline{J}\cap C\right)$.

$$p\left(\overline{J}\cap C\right) = p\left(\overline{J}\right)\times p_{\overline{J}}(C) = 0,15\times 0,1 = 0,015.$$

La probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3 est égale à $0,015$.

c) La probabilité demandée est $p(C)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(C) &= p(J\cap C) + p\left(\overline{J}\cap C\right) = p(J)\times p_J(C) + p\left(\overline{J}\right)\times p_{\overline{J}}(C) \\ &= 0,85\times 0,8 + 0,15\times 0,1 = 0,695. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(C) = 0,695.}$$

d) La probabilité demandée est $p_C\left(\overline{J}\right)$.

$$p_C\left(\overline{J}\right) = \frac{p\left(\overline{J}\cap C\right)}{p(C)} = \frac{p\left(\overline{J}\right)\times p_{\overline{J}}(C)}{p(C)} = \frac{0,15\times 0,1}{0,695} = 0,0216 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

$$\boxed{p_C\left(\overline{J}\right) = 0,0216 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

2) a) La probabilité demandée est $P(87 \leqslant X \leqslant 89)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{P(87 \leqslant X \leqslant 89) = 0,2417 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

b) La calculatrice fournit $P(X \geqslant 91) = 1 - P(X \leqslant 91) = 0,3085$ arrondi à 10^{-4}.

$$\boxed{P(X \geqslant 91) = 0,3085 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

Partie B

1) Ici, $n = 120$ et on suppose que $p = 0,6$. On note tout d'abord que $n \geqslant 30$. Ensuite, $np = 72$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) = 48$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,6 - 1,96\frac{\sqrt{0,6\times 0,4}}{\sqrt{120}}, p + 1,96\frac{\sqrt{0,6\times 0,4}}{\sqrt{120}}\right].$$

En arrondissant de manière à élargir un peu, on obtient l'intervalle $[0,5123; 0,6877]$.

2) La fréquence observée est $f = \dfrac{65}{120} = 0,54\ldots$ Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation. Donc, le restaurateur peut accepter l'affirmation de l'ostréiculteur mais il ne connaît pas le risque de se tromper.

EXERCICE 2

Partie A

1) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$g'(x) = -1 + e^x.$$

Pour tout réel x strictement négatif, on a $e^x < 1$ et donc $g'(x) < 0$ et pour tout réel strictement positif x, on a $e^x > 1$ et donc $g'(x) > 0$. On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. En tenant compte de $g(0) = 1 - 0 + e^0 = 2$, on en déduit le tableau de variations de f.

Tableau de variations de g.

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & -\infty & & 0 & & +\infty \\
\hline
g'(x) & & - & 0 & + & \\
\hline
g & & \searrow & 2 & \nearrow & \\
\hline
\end{array}$$

En particulier, la fonction g admet un minimum en 0 et ce minimum est égal à 2. Puisque ce minimum est strictement positif, on en déduit que la fonction g est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2) Limite de f en $-\infty$. Pour tout réel x, $x + \dfrac{x}{e^x} = x\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right) = x\left(e^{-x} + 1\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} + 1 = +\infty$ et d'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(e^{-x} + 1\right) = -\infty$ puis

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

Limite de f en $+\infty$. Pour tout réel non nul x, $\dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{e^x/x}$.

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. En prenant l'inverse, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

3) Pour tout réel x, $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 + 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}\left(e^x + 1 - x\right) = e^{-x}g(x).$$

4) Pour tout réel x, on a $e^{-x} > 0$. D'autre part, d'après la question 1), pour tout réel x, on a $g(x) > 0$. On en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations de f.

$$\begin{array}{|c|ccc|}
\hline
x & -\infty & & +\infty \\
\hline
f'(x) & & + & \\
\hline
f & -\infty & \nearrow & +\infty \\
\hline
\end{array}$$

5) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On sait alors que pour tout réel k de $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
En particulier, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.

De plus $f(-1) = -e^{-1} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$. Par suite, $f(-1) < f(\alpha) < f(0)$. Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $-1 < \alpha < 0$.

6) a) Une équation de la droite T est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = e^0 g(0) = 2$. Donc, une équation de la droite T est $y = 2x + 1$.

b) La position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T est donnée par le signe de $f(x)-(2x+1)$. Pour tout réel x,

$$f(x)-(2x+1) = x+1+\frac{x}{e^x}-(2x+1) = -x+xe^{-x} = x\left(e^{-x}-1\right).$$

Si $x<0$, on a $-x>0$ puis $e^{-x}>1$ et donc $e^{-x}-1>0$. Mais alors $f(x)-(2x+1)<0$.
Si $x>0$, on a $-x<0$ puis $e^{-x}<1$ et donc $e^{-x}-1<0$. Mais alors $f(x)-(2x+1)<0$.

Ainsi, pour tout réel x non nul, $f(x)-(2x+1)<0$. On en déduit que $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de T sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Enfin, $\mathscr{C}$ et T ont en commun le point de coordonnées $(0,1)$.

Partie B

1) La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

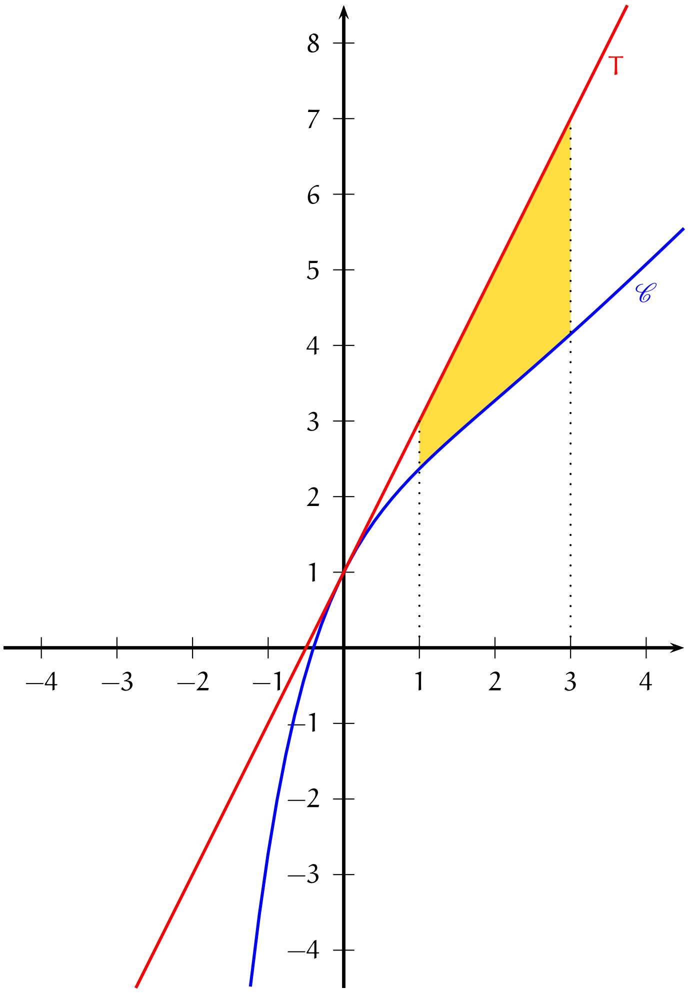
$$H'(x) = (-1)e^{-x}+(-x-1)\times(-1)\times e^{-x} = (-1+x+1)e^{-x} = xe^{-x}.$$

Donc la fonction H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.

2) La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de T sur l'intervalle $[1,3]$. Donc l'aire demandée est

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_1^3 ((2x+1)-f(x))\ dx = \int_1^3 \left(x-xe^{-x}\right)\ dx = \int_1^3 (x-h(x))\ dx\\ &= \left[\frac{x^2}{2}-H(x)\right]_1^3 = \left(\frac{3^2}{2}-(-3-1)e^{-3}\right)-\left(\frac{1^2}{2}-(-1-1)e^{-1}\right)\\ &= 4+4e^{-3}-2e^{-1}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 4+4e^{-3}-2e^{-1}.}$$



EXERCICE 3 : corrigé

Proposition 1	**FAUX**
Proposition 2	**VRAI**
Proposition 3	**FAUX**
Proposition 4	**FAUX**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les points $A(1\ ;\ 2\ ;\ 5)$, $B(-1\ ;\ 6\ ;\ 4)$, $C(7\ ;\ -10\ ;\ 8)$ et $D(-1\ ;\ 3\ ;\ 4)$.

Justification 1 : Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives les points $(1\ ;\ 2\ ;\ 5)$, $(-1\ ;\ 6\ ;\ 4)$ et $(7\ ;\ -10\ ;\ 8)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-2, 4, -1)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(6, -12, 3)$.
On note alors que $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$. Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ou encore les points A, B et C sont alignés.
On sait alors que les points A, B et C ne définissent pas un unique plan. La proposition 1 est fausse.

Justification 2 : Soit (P) le plan d'équation cartésienne $x - 2z + 9 = 0$.

- $x_A - 2z_A + 9 = 1 - 10 + 9 = 0$. Donc le point A appartient au plan (P).
- $x_B - 2z_B + 9 = -1 - 8 + 9 = 0$. Donc le point B appartient au plan (P).
- $x_D - 2z_D + 9 = -1 - 8 + 9 = 0$. Donc le point D appartient au plan (P).

Les points A, B et D appartiennent au plan (P). Puisque les points A, B et D définissent un unique plan, une équation cartésienne du plan (ABD) est $x - 2z + 9 = 0$. La proposition 2 est vraie.

Justification 3 : S'il existe un réel t tel que

$$\left\{\begin{array}{l} x_A = \dfrac{3}{2}t - 5 \\ y_A = -3t + 14 \\ z_A = -\dfrac{3}{2}t + 2 \end{array}\right.,$$

alors en particulier, $-\dfrac{3}{2}t + 2 = 5$ et donc $t = -2$ et aussi $-3t + 14 = 2$ et donc $t = 4$. Ceci est impossible et donc le point A n'appartient pas à la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2}t - 5 \\ y = -3t + 14 \\ z = -\dfrac{3}{2}t + 2 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. La proposition 3 est fausse.

Justification 4 : Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(2, -1, 5)$ et un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$ est le vecteur $\overrightarrow{n'}(-3, -1, 1)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires et donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles. La proposition 4 est fausse.

EXERCICE 4 (candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité)

1) a) On a $24x \leqslant 438$ et donc $x \leqslant \dfrac{438}{24}$ ou encore $x \leqslant 18,25$. Puisque x est un entier, on en déduit que $x \leqslant 18$.

De même, on a $45y \leqslant 438$ et donc $x \leqslant \dfrac{438}{45}$ ou encore $x \leqslant 9,7\ldots$. Puisque y est un entier, on en déduit que $y \leqslant 9$.

$$\boxed{x \leqslant 18 \text{ et } y \leqslant 9.}$$

b) Algorithme complété.

Entrée	x et y sont des nombres
Traitement	Pour x variant de 0 à 18 Pour y variant de 0 à 9 Si $24x + 45y = 438$ Afficher x et y Fin Si Fin Pour Fin Pour
Fin traitement	

2) La somme des chiffres de 438 est 15 qui est divisible par 3. Donc 438 est divisible par 3. Plus précisément, $438 = 3 \times 146$. Ainsi, le coût total de la réservation est un multiple de 3.

3) a) Les entiers $8 = 2^3$ et $15 = 3 \times 5$ n'ont pas de facteur premier commun. Donc les entiers 8 et 15 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $8u + 15v = 1$ ou encore, l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

b) $8 \times 2 + 15 \times (-1) = 16 - 15 = 1$. Donc le couple $(2, -1)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $8x + 15y = 1$.

c) Pour tous entiers relatifs x et y,

$$24x + 45y = 438 \Leftrightarrow 3(8x + 15y) = 3 \times 146 \Leftrightarrow 8x + 15y = 146 \quad (E).$$

Ensuite, le couple $(2, -1)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $8x + 15y = 1$. Mais alors, le couple $(x_0, y_0) = (2 \times 146, (-1) \times 146) = (292, -146)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $8x + 15y = 146$.

Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$8x + 15y = 146 \Leftrightarrow 8x + 15y = 8x_0 + 15y_0 \Leftrightarrow 8(x - x_0) = 15(y_0 - y).$$

Si (x, y) est solution de l'équation $8x + 15y = 146$, nécessairement l'entier relatif 15 divise l'entier relatif $8(x - x_0)$. Puisque 15 et 8 sont premiers entre eux, l'entier 15 divise $x - x_0$ d'après le théorème de Gauss. Donc, il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 15k$ ou encore tel que $x = x_0 + 15k$.

De même, il existe un entier relatif k' tel que $y_0 - y = 8k'$ ou encore tel que $y = y_0 - 8k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 15k$ et $y = y_0 - 15k'$.

$$\begin{aligned} 8x + 15y = 146 &\Leftrightarrow 8(x_0 + 15k) + 15(y_0 - 8k') = 146 \Leftrightarrow 8x_0 + 15y_0 + 8 \times 15 \times (k - k') = 146 \\ &\Leftrightarrow 8 \times 15 \times (k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'. \end{aligned}$$

Les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) : $8x + 15y = 146$ sont les couples de la forme $(292 + 15k, -146, 8k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

4) Soient k un entier relatif puis $x = 292 + 15k$.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant 13 &\Leftrightarrow 0 \leqslant 292 + 15k \leqslant 13 \Leftrightarrow -292 \leqslant 15k \leqslant -279 \Leftrightarrow -\frac{292}{15} \leqslant 15k \leqslant -\frac{279}{15} \\ &\Leftrightarrow -19,4\ldots \leqslant k \leqslant -18,6 \Leftrightarrow k = -19. \end{aligned}$$

Pour $k = -19$, on obtient $x = 292 - 15 \times 19 = 7$ et $y = -146 + 8 \times 19 = 6$. De plus, 7 et 6 sont des entiers naturels.

Le randonneur a passé 7 nuits en hébergement A et et 6 nuits en hébergement B.

