Amérique du sud. Novembre 2014. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) La calculatrice fournit $P(410 \leqslant X \leqslant 450) = 0,954$ à 10^{-3} près.

$$P(410 \leqslant X \leqslant 450) = 0,954 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

2) Posons $Z = \dfrac{Y-69}{\sigma}$. On sait que Z suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

Un ballon est conforme à la législation si et seulement si Y appartient à l'intervalle $[68, 70]$. Or,

$$68 \leqslant Y \leqslant 70 \Leftrightarrow -1 \leqslant Y - 69 \leqslant 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sigma} \leqslant \frac{Y-69}{\sigma} \leqslant \frac{1}{\sigma}.$$

L'énoncé dit que 97 % des ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation ou encore $p(68 \leqslant Y \leqslant 70) = 0,97$.

$$p(68 \leqslant Y \leqslant 70) = 0,97 \Leftrightarrow p\left(-\frac{1}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{1}{\sigma}\right) = 0,97 \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma} \approx 2,17 \Leftrightarrow \sigma = 0,46 \text{ au centième près.}$$

$$\boxed{\sigma = 0,46 \text{ au centième près.}}$$

Partie B

Notons F la variable aléatoire égale à la fréquence de ballons conformes à la réglementation.
Ici, $n = 250$ et on suppose que $p = 0,98$. On note tout d'abord que $n \geqslant 30$. Ensuite, $np = 245$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) = 5$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F est

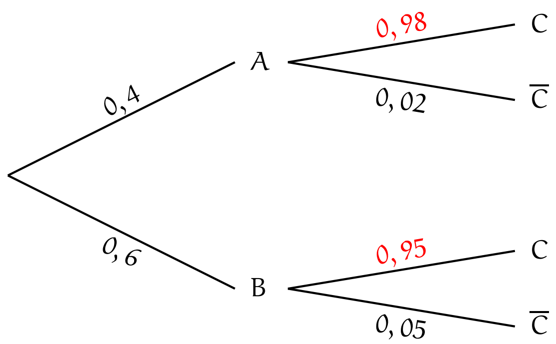
$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,98 - 1,96\frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{250}}; 0,98 + 1,96\frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{250}}\right].$$

En arrondissant de manière à élargir un peu, on obtient l'intervalle $[0,962; 0,998]$.

La fréquence observée est $f = \dfrac{233}{250} = 0,932\ldots$ Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation. Donc, le résultat du contrôle remet en question l'affirmation de l'entreprise au risque de se tromper de 5 %.

Partie C

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) La probabilité demandée est $p(A \cap C)$.

$$p(A \cap C) = p(A) \times p_A(C) = p(A) \times \left(1 - p_A\left(\overline{C}\right)\right) = 0,4 \times (1 - 0,02) = 0,392.$$

$$\boxed{p(A \cap C) = 0,392.}$$

3) La probabilité demandée est $p(C)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(C) &= p(A \cap C) + p\left(\overline{A} \cap C\right) = p(A) \times p_A(C) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(C) \\ &= 0,4 \times 0,98 + 0,6 \times 0,95 = 0,962. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(C) = 0,962.}$$

4) La probabilité demandée est $p_{\overline{C}}(A)$.

$$p_{\overline{C}}(A) = \frac{p\left(\overline{C} \cap A\right)}{p\left(\overline{C}\right)} = \frac{p(A) \times p_A\left(\overline{C}\right)}{1 - p(C)} = \frac{0,4 \times 0,02}{1 - 0,962} = 0,211 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

$$\boxed{p_{\overline{C}}(A) = 0,211 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

EXERCICE 2

1) réponse b)

2) réponse c)

3) réponse c)

4) réponse c)

Explication 1 : Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(1, -3, 2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-1, -2, -1)$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + (-3) \times (-2) + 2 \times (-1) = 3 \neq 0.$$

Donc, les réponses a) et c) sont fausses.

• $AB = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$.
• $AC = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \neq \sqrt{14}$.

Donc la réponse d) est fausse. La bonne réponse est la réponse b). Vérifions-le explicitement.

$BC = \sqrt{(1-3)^2 + (3-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} = AB$. Donc le triangle ABC est isocèle en B.

Explication 2 : Un vecteur normal au plan P est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2, -1, 3)$. Les droites des propositions a) et b) sont dirgées respectivement par le vecteur de coordonnées $(2, 1, 3)$ et par le vecteur de coordonnées $(2, 5, -1)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires au vecteur $\overrightarrow{n}$. Donc les réponses a) et b) sont fausses.

Quand $t = 2$ dans la représentation paramétrique c), on obtient $(2, 5, -1)$ qui sont les coordonnées du point A. La bonne réponse est la réponse c). Vérifions explicitement que la réponse d) est fausse.

Si le point A appartient à la droite d), il existe un réel t tel que $1 + 2t = 2$ et $4 - t = 5$ ou encore $t = \dfrac{1}{2}$ et $t = -1$ ce qui est impossible. Donc la réponse d) est effectivement fausse.

Explication 3 : On sait que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$. La bonne réponse est la réponse c).

Explication 4 : Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées respectives des points I, J, M et N sont $\left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right)$, $\left(1, \dfrac{1}{2}, 1\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Les points I et J sont dans le plan d'équation $z = 1$ et les points M et N sont dans le plan d'équation $z = \dfrac{1}{2}$. Ces plans n'ont pas de point commun et donc les droites (IJ) et (MN) n'ont pas de point commun. Les réponses a) et b) sont fausses.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ}$ sont $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$.
Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les droites (IJ) et (MN) ne sont pas parallèles. La réponse d) est fausse.

Donc la bonne réponse est la réponse c). Vérifions-le explicitement.

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} + 0 \times 0 = 0.$$

Donc les droites (IJ) et (MN) sont effectivement orthogonales.

EXERCICE 3

Partie A : Conjecture

1) $u_1 = -\frac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}2^2 + 3 \times 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$

$u_2 = -\frac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{25}{8} + 6 = \frac{23}{8} = 2,875.$

$$\boxed{u_1 = \frac{5}{2} \text{ et } u_2 = \frac{23}{8}.}$$

2) La calculatrice fournit

$$\boxed{u_3 = 2,99219 \text{ à } 10^{-5} \text{ près et } u_4 = 2,99997 \text{ à } 10^{-5} \text{ près.}}$$

3) La suite (u_n) semble croissante, convergente, de limite égale à 3.

Partie B : Validation des conjectures

Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right) = -\frac{1}{2}\left(u_n - 3\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2}v_n^2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2.}$$

2) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

- $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ et donc $-1 \leqslant v_0 \leqslant 0$. L'encadrement à démontrer est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ et montrons que $-1 \leqslant v_{n+1} \leqslant 0$.

$$\begin{aligned} -1 \leqslant v_n \leqslant 0 &\Rightarrow 0 \leqslant v_n^2 \leqslant 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leqslant -\frac{1}{2}v_n^2 \leqslant 0 \Rightarrow -1 \leqslant -\frac{1}{2}v_n^2 \leqslant 0 \\ &\Rightarrow -1 \leqslant v_{n+1} \leqslant 0. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ -1 \leqslant v_n \leqslant 0.}$$

3) a) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right).$$

b) Soit n un entier naturel. D'après la question 2) $v_n \leqslant 0$ et donc $-v_n \geqslant 0$. D'autre part, $v_n \geqslant -1$ et donc $\frac{1}{2}v_n + 1 \geqslant -\frac{1}{2} + 1$ puis $\frac{1}{2}v_n + 1 \geqslant \frac{1}{2}$ et en particulier, $\frac{1}{2}v_n + 1 \geqslant 0$.

On en déduit que $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right) \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ ou encore pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1}$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est croissante.}}$$

4) La suite (v_n) est croissante et majorée par 0. Donc, la suite (v_n) converge.

5) Soit ℓ un réel de $[-1, 0]$.

$$\ell = -\frac{1}{2}\ell^2 \Leftrightarrow \ell\left(\frac{1}{2}\ell + 1\right) \Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = -2$$
$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ (car } \ell \in [-1, 0]).$$

$$\boxed{\ell = 0.}$$

6) Pour tout entier naturel n, on a $u_n = v_n + 3$.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante d'après la question 3) b) et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite égale à 0 et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite égale à 3.

Les conjectures faites dans la partie A sont validées.

EXERCICE 4

Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

1) a) La fonction f est dérivable sur $[0,2]$ et pour tout réel x de $[0,2]$,

$$f'(x) = 1 \times e^{-4x} + \left(x + \frac{1}{4}\right) \times (-4) \times e^{-4x} + 0 = (1 - 4x - 1)\,e^{-4x} = -4xe^{-4x}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [0,2],\ f'(x) = -4xe^{-4x}.}$$

b) Pour tout réel x de $[0,2]$, $e^{-4x} > 0$ et donc pour tout réel x de $[0,2]$, $f'(x)$ est du signe de $-4x$. On en déduit le :

Tableau de variations de f.

x	0		2
$f'(x)$	0	$-$	
f	$b + \frac{1}{4}$	$\searrow$	$b + \frac{9}{4}e^{-2}$

2) D'après la question précédente, la hauteur maximale du portail est $b + \dfrac{1}{4}$.

$$b + \frac{1}{4} = 1,5 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow b = \frac{5}{4}.$$

Partie B : détermination d'une aire

1) La fonction F est dérivable sur $[0,2]$ et pour tout réel x de $[0,2]$,

$$F'(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)e^{-4x} + \left(-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right)(-4)e^{-4x} + \frac{5}{4} = \left(-\frac{1}{4} + x + \frac{1}{2}\right)e^{-4x} + \frac{5}{4} = \left(x + \frac{1}{4}\right)e^{-4x} + \frac{5}{4} = f(x).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0,2]$.

2) On fixe se place dans un repère orthonormé d'axe des ordonnées l'axe du portail, d'axe des abscisses le sol et d'unités 1 m. Une unité d'aire est égale à 1 m^2 et le haut d'un vantail est le graphe de la fonction f. La fonction f est continue et positive sur $[0,2]$. L'aire d'un vantail est l'aire en unités d'aire du domaine sous la courbe de f diminuée de l'aire du vide au bas du vantail à savoir $0,05 \times 2 = \dfrac{1}{10}$. L'aire demandée est donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^2 f(x)\,dx - \frac{1}{10} = [F(x)]_0^2 - \frac{1}{10} = \left(\left(-\frac{2}{4} - \frac{1}{8}\right)e^{-8} + \frac{5}{2}\right) - \left(\left(-\frac{1}{8}\right)e^{0}\right) - \frac{1}{10}\\ &= \frac{101}{40} - \frac{5}{8}e^{-8}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'aire d'un vantail est } \frac{101}{40} - \frac{5}{8}e^{-8} \text{ ou encore } 2,52 \text{ m}^2 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

Partie C : utilisation d'un algorithme

1) Les débuts gauches de chaque planche sont espacés de $0,12 + 0,05 = 0,17$ m. Le début gauche de la planche n° k est donc situé à $0,17k$ m du début gauche de la planche n° 0. On en déduit que la hauteur de la planche n° k planche est

$$f(0,17k) - 0,05 = \left(0,17k + \frac{1}{4}\right)e^{-4\times 0,7k} + \frac{5}{4} - \frac{1}{20} = \left(0,17k + \frac{1}{4}\right)e^{-0,68k} + \frac{6}{5},$$

puis que l'aire de la planche n° k est

$$\left(\left(0,17k + \frac{1}{4}\right)e^{-0,68k} + \frac{6}{5}\right) \times 0,12.$$

2) X prend les valeurs 0 ; $0,17$; $2 \times 0,17 = 0,34$; ... ; $11 \times 0,17 = 1,87$. Pour cette dernière valeur de X, on a $X + 0,17 = 2,04$ et on peut donc faire arrêter l'algorithme quand $X + 0,17 \geqslant 2,05$ ou encore le laisser continuer tant que $X + 0,17 < 2,05$.

L'aire de la planche dont l'abscisse du bord gauche est X est $(f(X) - 0,05) \times 0,12 = \left(\left(X + \frac{1}{4}\right)e^{-4X} + \frac{6}{5}\right) \times 0,12$.

Algorithme complété.

Variables :	Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation :	On affecte à S la valeur 0 On affecte à X la valeur 0
Traitement :	**Tant que** $X + 0,17 < 2,05$ S prend la valeur $S + \left(\left(X + \frac{1}{4}\right)e^{-4X} + \frac{6}{5}\right) \times 0,12$ X prend la valeur $X + 0,17$ **Fin de Tant que**
Sortie :	Afficher S

