Amérique du sud. Novembre 2014. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) La calculatrice fournit $P(410 \leqslant X \leqslant 450) = 0,954$ à 10^{-3} près.

$$P(410 \leqslant X \leqslant 450) = 0,954 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

2) Posons $Z = \dfrac{Y - 69}{\sigma}$. On sait que Z suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

Un ballon est conforme à la législation si et seulement si Y appartient à l'intervalle $[68, 70]$. Or,

$$68 \leqslant Y \leqslant 70 \Leftrightarrow -1 \leqslant Y - 69 \leqslant 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sigma} \leqslant \frac{Y-69}{\sigma} \leqslant \frac{1}{\sigma}.$$

L'énoncé dit que 97 % des ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation ou encore $p(68 \leqslant Y \leqslant 70) = 0,97$.

$$p(68 \leqslant Y \leqslant 70) = 0,97 \Leftrightarrow p\left(-\frac{1}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{1}{\sigma}\right) = 0,97 \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma} \approx 2,17 \Leftrightarrow \sigma = 0,46 \text{ au centième près.}$$

$$\boxed{\sigma = 0,46 \text{ au centième près.}}$$

Partie B

Notons F la variable aléatoire égale à la fréquence de ballons conformes à la réglementation.
Ici, $n = 250$ et on suppose que $p = 0,98$. On note tout d'abord que $n \geqslant 30$. Ensuite, $np = 245$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) = 5$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F est

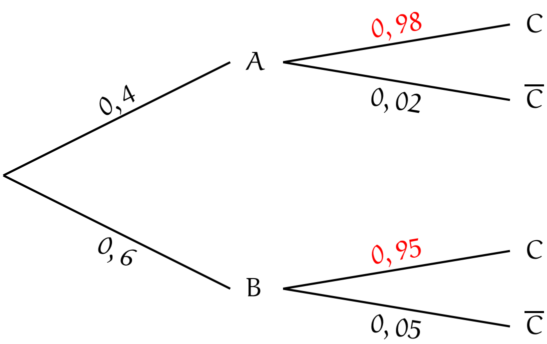
$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,98 - 1,96\frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{250}}; 0,98 + 1,96\frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{250}}\right].$$

En arrondissant de manière à élargir un peu, on obtient l'intervalle $[0,962; 0,998]$.

La fréquence observée est $f = \dfrac{233}{250} = 0,932\ldots$ Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation. Donc, le résultat du contrôle remet en question l'affirmation de l'entreprise au risque de se tromper de 5 %.

Partie C

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) La probabilité demandée est $p(A \cap C)$.

$$p(A \cap C) = p(A) \times p_A(C) = p(A) \times \left(1 - p_A\left(\overline{C}\right)\right) = 0,4 \times (1 - 0,02) = 0,392.$$

$$\boxed{p(A \cap C) = 0,392.}$$

3) La probabilité demandée est $p(C)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}p(C) &= p(A \cap C) + p\left(\overline{A} \cap C\right) = p(A) \times p_A(C) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(C)\\ &= 0,4 \times 0,98 + 0,6 \times 0,95 = 0,962.\end{aligned}$$

$$\boxed{p(C) = 0,962.}$$

4) La probabilité demandée est $p_{\overline{C}}(A)$.

$$p_{\overline{C}}(A) = \frac{p\left(\overline{C} \cap A\right)}{p\left(\overline{C}\right)} = \frac{p(A) \times p_A\left(\overline{C}\right)}{1 - p(C)} = \frac{0,4 \times 0,02}{1 - 0,962} = 0,211 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

$$\boxed{p_{\overline{C}}(A) = 0,211 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

EXERCICE 2

1) réponse b)

2) réponse c)

3) réponse c)

4) réponse c)

Explication 1 : Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(1, -3, 2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-1, -2, -1)$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + (-3) \times (-2) + 2 \times (-1) = 3 \neq 0.$$

Donc, les réponses a) et c) sont fausses.

- $AB = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$.
- $AC = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \neq \sqrt{14}$.

Donc la réponse d) est fausse. La bonne réponse est la réponse b). Vérifions-le explicitement.

$BC = \sqrt{(1-3)^2 + (3-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} = AB$. Donc le triangle ABC est isocèle en B.

Explication 2 : Un vecteur normal au plan P est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2, -1, 3)$. Les droites des propositions a) et b) sont dirgées respectivement par le vecteur de coordonnées $(2, 1, 3)$ et par le vecteur de coordonnées $(2, 5, -1)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires au vecteur $\overrightarrow{n}$. Donc les réponses a) et b) sont fausses.

Quand $t = 2$ dans la représentation paramétrique c), on obtient $(2, 5, -1)$ qui sont les coordonnées du point A. La bonne réponse est la réponse c). Vérifions explicitement que la réponse d) est fausse.

Si le point A appartient à la droite d), il existe un réel t tel que $1 + 2t = 2$ et $4 - t = 5$ ou encore $t = \dfrac{1}{2}$ et $t = -1$ ce qui est impossible. Donc la réponse d) est effectivement fausse.

Explication 3 : On sait que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$. La bonne réponse est la réponse c).

Explication 4 : Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées respectives des points I, J, M et N sont $\left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right)$, $\left(1, \dfrac{1}{2}, 1\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Les points I et J sont dans le plan d'équation $z = 1$ et les points M et N sont dans le plan d'équation $z = \dfrac{1}{2}$. Ces plans n'ont pas de point commun et donc les droites (IJ) et (MN) n'ont pas de point commun. Les réponses a) et b) sont fausses.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ}$ sont $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les droites (IJ) et (MN) ne sont pas parallèles. La réponse d) est fausse.

Donc la bonne réponse est la réponse c). Vérifions-le explicitement.

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} + 0 \times 0 = 0.$$

Donc les droites (IJ) et (MN) sont effectivement orthogonales.

EXERCICE 3

Partie A

1) Soit n un entier naturel. A l'heure $n+1$, à la station A, il n'y a plus que 20 % des vélos présents à l'heure n, soit $0,2a_n$, et d'autre part, 10 % des vélos présents à la station B sont maintenant à la station A, soit $0,1b_n$. Au total, $a_{n+1} = 0,2a_n + 0,1b_n$. De même, $b_{n+1} = 0,6a_n + 0,3b_n$ et donc

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2a_n + 0,1b_n \\ 0,6a_n + 0,3b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \times U_n,$$

avec $M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$.

2) $U_1 = M \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 50 + 0,1 \times 60 \\ 0,6 \times 50 + 0,3 \times 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix}$.

$U_2 = M \times U_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 16 + 0,1 \times 48 \\ 0,6 \times 16 + 0,3 \times 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}$.

3) $U_3 = M \times U_2 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 8 + 0,1 \times 24 \\ 0,6 \times 8 + 0,3 \times 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

$U_4 = M \times U_3 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 4 + 0,1 \times 12 \\ 0,6 \times 4 + 0,3 \times 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$U_5 = M \times U_4 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 2 + 0,1 \times 6 \\ 0,6 \times 2 + 0,3 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Au bout de cinq heures, il ne reste plus qu'un vélo dans la station A.

Partie B

1) a) Soit V une matrice colonne à deux lignes.

$$V = M \times V + R \Leftrightarrow V - M \times V = R \Leftrightarrow (I - M) \times V = R \Leftrightarrow N \times V = R.$$

b)

$$NV = R \Rightarrow N^{-1}NV = N^{-1}R \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 42+2 \\ 36+16 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}.$$

2) a) Soit n un entier naturel.

$$W_{n+1} = V_{n+1} - V = (M \times V_n + R) - (M \times V + R) = M \times (V_n - V) = M \times W_n.$$

b) Soit n un entier naturel non nul. $W_0 = V_0 - V = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ puis

$$V_n = W_n + V = M^n \times W_0 + V$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 52 + 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

c) Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 44$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = 52$.

Le nombre moyen de vélos présents dans les stations A et B a tendance à se stabiliser : autour de 44 vélos dans la station A et 52 vélos dans la station B.

EXERCICE 4

Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

1) a) La fonction f est dérivable sur $[0,2]$ et pour tout réel x de $[0,2]$,

$$f'(x) = 1 \times e^{-4x} + \left(x + \frac{1}{4}\right) \times (-4) \times e^{-4x} + 0 = (1 - 4x - 1)\,e^{-4x} = -4xe^{-4x}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [0,2],\ f'(x) = -4xe^{-4x}.}$$

b) Pour tout réel x de $[0,2]$, $e^{-4x} > 0$ et donc pour tout réel x de $[0,2]$, $f'(x)$ est du signe de $-4x$. On en déduit le :

Tableau de variations de f.

x	0		2
$f'(x)$	0	$-$	
f	$b + \frac{1}{4}$	$\searrow$	$b + \frac{9}{4}e^{-2}$

2) D'après la question précédente, la hauteur maximale du portail est $b + \dfrac{1}{4}$.

$$b + \frac{1}{4} = 1,5 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow b = \frac{5}{4}.$$

Partie B : détermination d'une aire

1) La fonction F est dérivable sur $[0,2]$ et pour tout réel x de $[0,2]$,

$$F'(x) = \left(-\frac{1}{4}\right) e^{-4x} + \left(-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right)(-4)e^{-4x} + \frac{5}{4} = \left(-\frac{1}{4} + x + \frac{1}{2}\right) e^{-4x} + \frac{5}{4} = \left(x + \frac{1}{4}\right) e^{-4x} + \frac{5}{4} = f(x).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0,2]$.

2) On fixe se place dans un repère orthonormé d'axe des ordonnées l'axe du portail, d'axe des abscisses le sol et d'unités 1 m. Une unité d'aire est égale à 1 m^2 et le haut d'un vantail est le graphe de la fonction f. La fonction f est continue et positive sur $[0,2]$. L'aire d'un vantail est l'aire en unités d'aire du domaine sous la courbe de f diminuée de l'aire du vide au bas du vantail à savoir $0,05 \times 2 = \dfrac{1}{10}$. L'aire demandée est donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^2 f(x)\,dx - \frac{1}{10} = [F(x)]_0^2 - \frac{1}{10} = \left(\left(-\frac{2}{4} - \frac{1}{8}\right) e^{-8} + \frac{5}{2}\right) - \left(\left(-\frac{1}{8}\right) e^{0}\right) - \frac{1}{10} \\ &= \frac{101}{40} - \frac{5}{8}e^{-8}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'aire d'un vantail est } \frac{101}{40} - \frac{5}{8}e^{-8} \text{ ou encore } 2,52 \text{ m}^2 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

Partie C : utilisation d'un algorithme

1) Les débuts gauches de chaque planche sont espacés de $0,12 + 0,05 = 0,17$ m. Le début gauche de la planche n° k est donc situé à $0,17k$ m du début gauche de la planche n° 0. On en déduit que la hauteur de la planche n° k planche est

$$f\,(0,17k)) - 0,05 = \left(0,17k + \frac{1}{4}\right) e^{-4\times 0,7k} + \frac{5}{4} - \frac{1}{20} = \left(0,17k + \frac{1}{4}\right) e^{-0,68k} + \frac{6}{5},$$

puis que l'aire de la planche n° k est

$$\left(\left(0,17k + \frac{1}{4}\right) e^{-0,68k} + \frac{6}{5}\right) \times 0,12.$$

2) 0 ; $0,17$; $2\times 0,17=0,34$; ... ; $11\times 0,17=1,87$. Pour cette dernière valeur de X, on a $X+0,17=2,04$ et on peut donc faire arrêter l'algorithme quand $X+0,17\geqslant 2,05$ ou encore le laisser continuer tant que $X+0,17<2,05$.
L'aire de la planche dont l'abscisse du bord gauche est X est $(f(X)-0,05)\times 0,12=\left(\left(X+\dfrac{1}{4}\right)e^{-4X}+\dfrac{6}{5}\right)\times 0,12$.

Algorithme complété.

Variables :	Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation :	On affecte à S la valeur 0 On affecte à X la valeur 0
Traitement :	**Tant que** $X+0,17<2,05$ $\quad$ S prend la valeur $S+\left(\left(X+\dfrac{1}{4}\right)e^{-4X}+\dfrac{6}{5}\right)\times 0,12$ $\quad$ X prend la valeur $X+0,17$ **Fin de Tant que**
Sortie :	Afficher S