France métropolitaine Septembre 2013. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Sur le graphique, on lit : la fonction f est strictement négative sur $]-\infty, -2[$, strictement positive sur $]-2, +\infty[$ et s'annule en -2.

2) a) F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Donc, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$.
Sur le graphique, on lit : $F'(0) = f(0) = 2$ et $F'(-2) = f(-2) = 0$.

b) Sur la courbe $\mathscr{C}_3$, le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est $\dfrac{3}{2}$ et n'est pas 2. La courbe $\mathscr{C}_3$ n'est pas la bonne courbe.
Sur la courbe $\mathscr{C}_2$, le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -2 est environ -1 et n'est pas 0. La courbe $\mathscr{C}_2$ n'est pas la bonne courbe.

La bonne courbe est la courbe $\mathscr{C}_1$.

Partie B

1) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables ur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{\frac{1}{2}x} + (x+2) \times \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \left(1 + \frac{1}{2}(x+2)\right) e^{\frac{1}{2}x} = \frac{x+4}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}.}$$

b) Pour tout réel x, $\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} > 0$ et donc, pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $x+4$. Donc la fonction f' est négative sur $]-\infty, -4]$ et positive sur $[-4, +\infty[$.

Par suite, la fonction f est décroissante sur $]-\infty, -4]$ et croissante sur $[4, +\infty[$. On en déduit que la fonction f admet un minimum en -4. Ce minimum est égal à

$$f(-4) = (-4+2)e^{\frac{1}{2}\times(-4)} = -2e^{-2}.$$

$$\boxed{f \text{ admet un minimum en } -4 \text{ égal à } -2e^{-2}.}$$

2) a) La fonction f est continue et positive sur le segment $[0, 1]$. Le nombre I est donc l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre l'axe (Ox) et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.

b) Pour tout réel x

$$\begin{aligned} 2(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) &= 2\left(1 \times e^{\frac{1}{2}x} + x \times \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\right) = 2\left(\frac{x}{2} + 1\right)e^{\frac{1}{2}x} \\ &= (x+2)e^{\frac{1}{2}x} = f(x). \end{aligned}$$

c)

$$I = \int_0^1 2\left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)\,dx = [2u(x)v(x)]_0^1 = 1 \times 2\left(e^{\frac{1}{2}} - 0 \times e^0\right) = 2e^{\frac{1}{2}}.$$

$$\boxed{I = 2e^{\frac{1}{2}}.}$$

3) a) Quand $n = 3$, la valeur de s affichée par l'algorithme est

$$s_3 = \frac{1}{3}f(0) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right).$$

Puisque chaque rectangle a la même largeur, la largeur commune de ces rectangles est $\dfrac{1}{3}$ et donc s_3 est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique fourni dans l'énoncé.

b) Quand n devient grand, s_n est une bonne approximation de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

EXERCICE 2

1) réponse b)

2) réponse b)

3) réponse a)

4) réponse c)

Justification 1. Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(3,2,1)$ et un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}(-2,3,0)$.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = 3\times(-2)+2\times 3+1\times 0 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n}$ et donc la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Soit $M(5-2t, 1+3t, 4)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite $\mathscr{D}$.

$$3(5-2t)+2(1+3t)+(4)-6 = 0t+15 = 15\neq 0.$$

Aucun point de la droite $\mathscr{D}$ n'appartient au plan $\mathscr{P}$. Donc la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ mais n'est pas incluse dans le plan $\mathscr{P}$. La bonne réponse est la réponse b).

Remarque. La réponse c) ne pouvait pas être exacte car alors les réponses b) et c) auraient été exactes ce qui est exclu.

Justification 2. Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$ est le vecteur $\overrightarrow{u'} = (2,-1,2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires et donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles. On sait alors que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes ou non coplanaires.

Soient $M(5-2t, 1+3t, 4)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite $\mathscr{D}$ et $M'(3+2t', 1-t', 1+2t')$, $t'\in\mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}'$.

$$M = M' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5-2t = 3+2t' \\ 1+3t = 1-t' \\ 4 = 1+2t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = \dfrac{3}{2} \\ 5-2t = 3+2\times\dfrac{3}{2} \\ 1+3t = 1-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = \dfrac{3}{2} \\ t = -\dfrac{1}{2} \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = \dfrac{3}{2} \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Pour $t = -\dfrac{1}{2}$ (ou $t' = \dfrac{3}{2}$), on obtient le point A de coordonnées $\left(6, -\dfrac{1}{2}, 4\right)$. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes en A et donc la bonne réponse est la réponse b).

Justification 3. Soit M un point du plan, d'affixe z. Posons $z = x+iy$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned} |z+i| = |z-i| &\Leftrightarrow |x+i(y+1)|^2 = |x+i(y-1)|^2 \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2 = x^2+(y-1)^2 \\ &\Leftrightarrow y^2+2y+1 = y^2-2y+1 \Leftrightarrow 4y = 0 \Leftrightarrow y = 0. \end{aligned}$$

$\mathscr{E}$ est l'axe des abscisses et donc la bonne réponse est la réponse a).

Justification 4. $\left|\dfrac{c}{b}\right| = \left|\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = \sqrt{2}$. D'autre part, $\left|\dfrac{c}{b}\right| = \dfrac{|c|}{|b|} = \dfrac{OC}{OB}$. Donc $OC = \sqrt{2}OB$. Puisque $B\neq O$, le triangle OBC n'est pas isocèle en O.

$\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = (1+i)$ puis $c = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}c = (1+i)b$. Mais alors

$$BC = |c-b| = |(1+i)b-b| = |ib| = |i|\times|b| = 1\times OB = 0B.$$

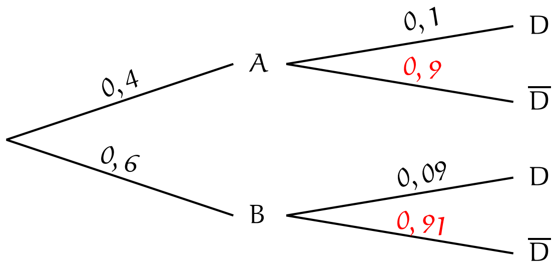
Donc, le triangle OBC est isocèle en B. Enfin,

$$BC^2+BO^2 = BO^2+BO^2 = 2BO^2 = \left(\sqrt{2}B0\right)^2 = OC^2.$$

Donc, le triangle OBC est isocèle et rectangle en B. La bonne réponse est la réponse c).

EXERCICE 3

1) a) Représentons la situation par un arbre.



b) La probabilité demandée est $p(A \cap D)$.

$$p(A \cap D) = p(A) \times p_A(D) = 0,4 \times 0,1 = 0,04.$$

$$\boxed{p(A \cap D) = 0,04.}$$

c) La probabilité demandée est $p(D)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(D) &= p(A \cap D) + p\left(\overline{A} \cap D\right) = p(A) \times p_A(D) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(D) \\ &= 0,4 \times 0,1 + 0,6 \times 0,09 = 0,04 + 0,054 = 0,094. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(D) = 0,094.}$$

d) La probabilité demandée est $p_D(A)$.

$$p_D(A) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{0,04}{0,094} = \frac{40}{94} = \frac{20}{47}.$$

$$\boxed{p_D(A) = \frac{20}{47} = 0,426 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

2) a) X_n suit une loi binomiale. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « la pièce prélevée est conforme » avec une probabilité $p = 0,9$ et « la pièce prélevée n'est pas conforme » avec une probabilité $1 - p = 0,1$.

Donc, X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,9$.

b) Ici $n = 150$ et $p = 0,9$. L'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la variable aléatoire F_{150} est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,9 - 1,96\frac{\sqrt{0,9 \times 0,1}}{\sqrt{150}}; 0,9 + 1,96\frac{\sqrt{0,9 \times 0,1}}{\sqrt{150}}\right].$$

En arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle, on obtient l'intervalle $[0,85; 0,95]$.

c) La fréquence de pièces conformes observée est $f = \dfrac{150 - 21}{150} = \dfrac{129}{150} = 0,86$. La fréquence f appartient à l'intervalle de fluctuation. On ne peut donc pas remettre en cause le réglage de la machine.

EXERCICE 4

Partie A

1) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} P_{n+1} = (s_{n+1}\ i_{n+1}\ m_{n+1}) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}s_n & \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n & \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n \end{pmatrix} \\ &= (s_n\ i_n\ m_n) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.

- $P_1 = P_0 \times A = P_0 \times A^1$. La formule à démontrer est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $P_n = P_0 \times A^n$ et montrons que $P_{n+1} = P_0 \times A^{n+1}$.

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n \times A \\ &= P_0 \times A^n \times A \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= P_0 \times A^{n+1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.

3) D'après la question précédente, $P_4 = P_0 \times A^4$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{5}{18} & \frac{11}{18} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

puis

$$A^4 = \left(A^2\right)^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{5}{18} & \frac{11}{18} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{5}{18} & \frac{11}{18} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{81} & \frac{65}{648} & \frac{575}{648} \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{15}{16} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$P_4 = (0,99 \quad 0 \quad 0,01) \begin{pmatrix} \frac{1}{81} & \frac{65}{648} & \frac{575}{648} \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{15}{16} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,01 \quad 0,10 \quad 0,89) \text{ arraondi à } 10^{-2}.$$

La probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines est donc $s_4 = 0,01$ arrondi à 10^{-2}.

Partie B

1) Soit n un entier naturel. Puisque $Q_{n+1} = Q_n \times B$,

$$\left\{\begin{array}{l} S_{n+1} = \dfrac{5}{12}S_n + \dfrac{5}{12}I_n + \dfrac{1}{6}M_n \\ I_{n+1} = \dfrac{1}{4}S_n + \dfrac{1}{4}I_n + \dfrac{1}{2}M_n \\ M_{n+1} = \dfrac{1}{3}S_n + \dfrac{1}{3}I_n + \dfrac{1}{3}M_n \end{array}\right. .$$

2)

$$B^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{48}{144} & \dfrac{16}{48} & \dfrac{12}{36} \\ \dfrac{48}{144} & \dfrac{16}{48} & \dfrac{12}{36} \\ \dfrac{24}{72} & \dfrac{8}{24} & \dfrac{6}{18} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, $B^2 = \dfrac{1}{3}J$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

3) a) Soit $n \geqslant 2$.

$$Q_n = Q_0 \times B^n = Q_0 \times \frac{1}{3}J = (0,01 \quad 0,10 \quad 0,89) \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(1 \quad 1 \quad 1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

b) A partir de deux semaines, les proportions respectives d'individus sains, porteurs sains et malades sont constantes égales à $\dfrac{1}{3}$.
En particulier, la proportion de malades ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc, on ne peut pas espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin.