Antilles Guyane. Septembre 2013. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

Restitution organisée de connaissances

• Si Δ est orthogonale à toute droite du plan P, en particulier Δ est orthogonale aux droites D_1 et à D_2.

• Réciproquement, supposons que Δ soit orthogonale aux droites D_1 et à D_2. Il revient au même de dire que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

Soient D une droite du plan P puis $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de D.

Puisque les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont deux droites sécantes du plan P, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan P. Puisque $\overrightarrow{u}$ est un vecteur du plan P, on sait qu'il existe deux réels λ et μ tels que

$$\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}.$$

Mais alors

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}.\left(\lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}\right) = \lambda\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_2} = 0 + 0 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}$ ou encore la droite Δ est orthogonale à D.

On a ainsi montré que si Δ est orthogonale à deux droites sécantes du plan P, alors Δ est orthogonale à toute droite du plan P.

Partie B

Affirmation 1	**VRAI**
Affirmation 2	**FAUX**
Affirmation 3	**VRAI**
Affirmation 4	**VRAI**

Justification 1. Un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\overrightarrow{v}(1, 3, -2)$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(4, -2, -1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-1, -1, -2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan P.

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{AB} = 1 \times 4 + 3 \times (-2) + (-2) \times (-1) = 4 - 6 + 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + 3 \times (-1) + (-2) \times (-2) = -1 - 3 + 4 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ou encore la droite Δ est orthogonale aux droites (AB) et (AC). On en déduit que la droite Δ est orthogonale à toute droite du plan P. L'affirmation 1 est vraie.

Justification 2. Puisque la droite Δ est orthogonale à la droite (AB), les droites Δ et (AB) ne sont pas parallèles et donc sont sécantes ou non coplanaires.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\left\{\begin{array}{l} x = 4u \\ y = -1 - 2u \\ z = 1 - u \end{array}\right.$, $u \in \mathbb{R}$.

Soient $M(t, 3t - 1, -2t + 8)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ et $N(4u, 1 - 2u, 1 - u)$, $u \in \mathbb{R}$, un point de (AB).

$$M = N \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4u \\ 3t - 1 = 1 - 2u \\ -2t + 8 = 1 - u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4u \\ 3(4u) - 1 = 1 - 2u \\ -2(4u) + 8 = 1 - u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4u \\ 14u = 2 \\ 7u = 7 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4u \\ u = \dfrac{1}{7} \\ u = 1 \end{array}\right. .$$

Ce système n'a pas de solution et donc les droites Δ et (AB) ne sont pas sécantes. On en déduit que les droites Δ et (AB) ne sont pas coplanaires. L'affirmation 2 est fausse.

Justification 3. Les points A, B et C définissent un unique plan à savoir le plan (ABC).

- $x_A + 3y_A - 2z_A + 5 = 0 - 3 - 2 + 5 = 0$. Donc le point A appartient au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.
- $x_B + 3y_B - 2z_B + 5 = 4 - 9 + 0 + 5 = 0$. Donc le point B appartient au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.
- $x_C + 3y_C - 2z_C + 5 = -1 - 6 + 2 + 5 = 0$. Donc le point C appartient au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

Ainsi, les points A, B et C appartiennent au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$ et donc le plan (ABC) est le plan d'équation $x + 3y - 2z = 0$. L'affirmation 3 est vraie.

Justification 4. Le plan (ABC) admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}(1, 3, -2)$ et la droite Δ admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}(11\ ;\ -1\ ;\ 4)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 11 \times 1 + (-1) \times 3 + 4 \times (-2) = 11 - 3 - 8 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux et donc la droite D est parallèle au plan d'équation $x+3y-2z+5 = 0$ qui est le plan (ABC). Plus précisément, la droite D est strictement parallèle au plan (ABC) ou incluse dans le plan (ABC). D'autre part,

$$x_O + 3y_O - 2z_0 + 5 = 0 + 0 + 0 + 5 = 0t + 5 = 5.$$

Donc, le point O n'appartient pas au plan d'équation $x+3y-2z+5 = 0$ et on en déduit que la droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$. L'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 2

Partie A : Étude du cas $k = 1$

1) Limite de f en $-\infty$. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty.}$$

Limite de f en $+\infty$. Pour tout réel non nul x,

$$f_1(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^x/x}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. En prenant l'inverse, on obtient

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 0.}$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_1$ admet l'axe (Ox) pour asymptote en $+\infty$.

2) La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_1'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = (1 - x)e^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc pour tout réel x, $f_1'(x)$ est du signe de $1 - x$. On en déduit le tableau de variation de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

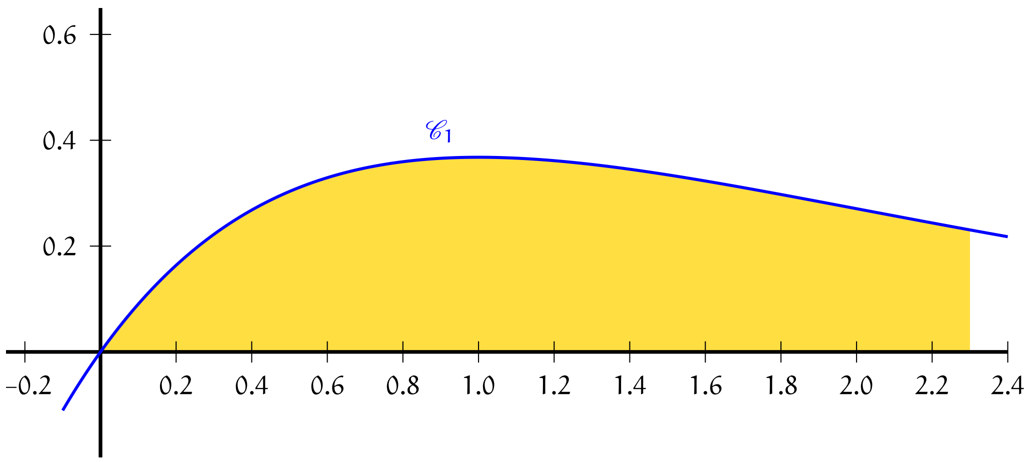
3) La fonction g_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g_1'(x) = -\left(1 \times e^{-x} + (x+1) \times (-1) \times e^{-x}\right) = -(1 - x - 1)e^{-x} = xe^{-x} = f_1(x).$$

Donc la fonction g_1 est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4) Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$. Donc pour tout réel x, $f_1(x)$ est du signe de x. La fonction f_1 est donc strictement négative sur $]-\infty, 0[$, strictement positive sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0.

5) La fonction f_1 est continue et positive sur l'intervalle $[0, \ln 10]$.



Donc l'aire demandée est

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^{\ln 10} f_1(x)\,dx = [g_1(x)]_0^{\ln 10} = \left(-(\ln 10 + 1)e^{-\ln 10}\right) - \left(-(0+1)e^0\right) \\ &= -(\ln 10 + 1)\frac{1}{e^{\ln 10}} + 1 = 1 - \frac{\ln 10 + 1}{10} = \frac{9 - \ln 10}{10}.\end{aligned}$$

Partie B : Propriétés graphiques

1) Pour tout réel k strictement positif, $f_k(0) = 0$ et donc pour tout réel k strictement positif, la courbe $\mathscr{C}_k$ passe par O.

2) a) Soit k un réel strictement positif. La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_k'(x) = k\left(1 \times e^{-kx} + x \times (-k) \times e^{-kx}\right) = k(1-kx)e^{-kx}.$$

b) Pour tout réel x, $f_k'(x)$ est du signe de $1 - kx$. Par suite, puisque $k > 0$, la fonction f_k' est strictement positive sur $\left]-\infty, \frac{1}{k}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{1}{k}, +\infty\right[$ et s'annule en $\frac{1}{k}$.

On en déduit que la fonction f_k admet un maximum en $\frac{1}{k}$ et que ce maximum est égal à

$$f_k\left(\frac{1}{k}\right) = k \times \frac{1}{k} \times e^{-k\times\frac{1}{k}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

c) L'abscisse du sommet de la courbe $\mathscr{C}_a$ est environ $0,1 = \frac{1}{10}$ et donc

$\boxed{a \text{ est environ égal à } 10.}$

d) Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ au point O est $y = f_k'(0)(x-0) + f_k(0)$ avec $f_k(0) = 0$ et $f_k'(0) = k(1-0)e^0 = k$. Donc une équation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ au point O est $y = kx$.

e) Le coefficient directeur de T est $\frac{0,6}{0,2} = 3$ et le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_b$ au point O est b. Donc

$\boxed{b = 3.}$

EXERCICE 3

1) La probabilité demandée est $p_1 = P(35,4 \leqslant X \leqslant 36,6)$. La calculatrice (ou le cours) fournit

$$\boxed{p_1 = 0,997 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut.}}$$

2) D'après le tableau

$$P(5,88 \leqslant Y \leqslant 6,12) = P(Y \leqslant 6,12) - P(Y \leqslant 5,88) = 0,991\ 802\ 464 - 0,008\ 197\ 536 = 0,983\ 604\ 928.$$

Donc

$$\boxed{p_2 = 0,983 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut.}}$$

3) a) La probabilité demandée est $P(L \cap D)$. Puisque les événements L et D sont indépendants,

$$P(L \cap D) = P(L) \times P(D) = p_1 \times p_2 = 0,997 \times 0,983 = 0,98 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

$$\boxed{P(L \cap D) = 0,98 \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

b) La probabilité demandée est $P_L(D)$. Puisque les événements L est D sont indépendants, $P_L(D) = P(D) = p_2$.

EXERCICE 4

Partie A : modélisation et simulation

1) Le couple $(-1, 1)$ ne peut pas être obtenu car x démarre à 0 et progresse de 1 à partir de chaque étape de l'algorithme. x ne peut donc prendre la valeur -1.

Le couple $(10, 0)$ peut être obtenu par exemple si n prend la valeur 0 à chaque étape de l'algorithme.

Le couple $(2, 4)$ ne peut pas être obtenu car pour obtenir $y = 4$, il a fallu d'abord obtenir $y = 3$ et avant $y = 2$. Mais l'algorithme s'arrête si y prend la valeur 2.

Le couple $(10, 2)$ peut être obtenu avec le parcours $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$, $4, 0)$, $(5, 0)$, $(6, 0)$, $(7, 0)$, $(8, 0)$, $(9, 1)$ et $(10, 2)$.

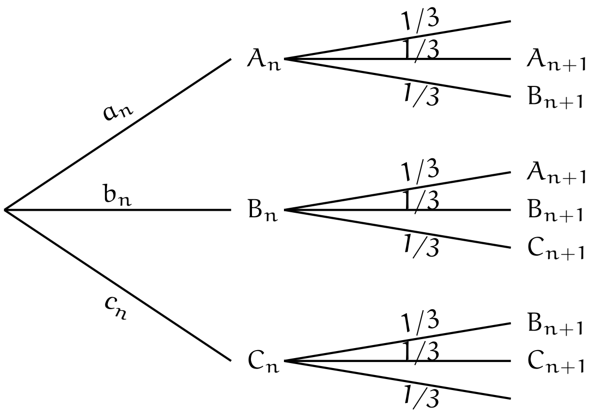
2) Algorithme modifié.

```
x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que y ⩾ −1 et y ⩽ 1 et x ⩽ 9
    Affecter à n une valeur choisie au hasard entre −1, 0 et 1
    Affecter à y la valeur y + n
    Affecter à x la valeur x + 1
Fin tant que
Si x = 10
    Afficher « Tom a réussi la traversée »
    Sinon afficher « Tom est tombé »
Fin si
```

Partie B

1) Tom démarre du point de coordonnées $(0, 0)$. Donc, il est sûr qu'après 0 déplacement, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0. Ceci montre que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$.

2) Représentons la situation par un arbre pondéré.



D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= p(A_{n+1}) = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1}) = p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(B_n) \times p_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3} = \frac{a_n + b_n}{3}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= p(B_{n+1}) = p(A_n \cap B_{n+1}) + p(B_n \cap B_{n+1}) + p(C_n \cap B_{n+1}) \\ &= p(A_n) \times p_{A_n}(B_{n+1}) + p(B_n) \times p_{B_n}(B_{n+1}) + p(C_n) \times p_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{3} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}.\end{aligned}$$

3) $p(A_1) = a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{3} = \dfrac{1}{3}$, $p(B_1) = b_1 = \dfrac{a_0 + b_0 + c_0}{3} = \dfrac{1}{3}$ et bien sûr, $p(C_1) = p(A_1) = \dfrac{1}{3}$.

4) Tom est sur le pont au bout de deux déplacements si et seulement si Tom est sur le pont au bout de un déplacement et se trouve sur un point d'ordonnée -1, 0 ou 1 au bout de deux déplacements.
L'événement « Tom est sur le pont au bout de un déplacement » est certain. La probabilité demandée est donc

$$p(A_2 \cup B_2 \cup C_2) = p(A_2) + p(B_2) + p(C_2) = a_2 + b_2 + c_2 = 2a_2 + b_2.$$

$a_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{3} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$ et $b_2 = \dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3} = \dfrac{1}{3}$. Donc la probabilité que Tom soit sur le pont au bout de deux déplacements est

$$2 \times \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}.$$

La probabilité que Tom soit sur le pont au bout de deux déplacements est égale à $\dfrac{7}{9}$.

5) De même, la probabilité que Tom traverse le pont est la probabilité que Tom soit sur le pont au bout de dix déplacements. Cette probabilité est

$$a_{10} + b_{10} + c_{10} = 2 \times 0,040\,272 + 0,056\,953 = 0,137\,497.$$

La probabilité que Tom traverse le pont est égale à $0,13$ à 10^{-2} près.

