BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Partie A

Restitution organisée de connaissances

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et soit P un plan.
On considère deux droites sécantes et contenues dans P : la droite D_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ et la droite D_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$.

Montrer que Δ est orthogonale à toute droite de P si et seulement si Δ est orthogonale à D_1 et à D_2.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points

$$A(0\ ;\ -1\ ;\ 1),\quad B(4\ ;\ -3\ ;\ 0)\ \text{ et }\ C(-1\ ;\ -2\ ;\ -1).$$

On appelle P le plan passant par A, B et C.

On appelle Δ la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 3t - 1 \\ z = -2t + 8 \end{array}\right.$ avec t appartenant à $\mathbb{R}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Affirmation 1. Δ est orthogonale à toute droite du plan P.

Affirmation 2. les droites Δ et (AB) sont coplanaires.

Affirmation 3. Le plan P a pour équation cartésienne $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

On appelle D la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(11\ ;\ -1\ ;\ 4)$.

Affirmation 4.
La droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

EXERCICE 2 (6 points)

(commun à tous les candidats)

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kxe^{-kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A : Étude du cas $k = 1$

On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = xe^{-x}.$$

1) Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
En déduire que la courbe $\mathscr{C}_1$ admet une asymptote que l'on précisera.

2) Étudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que la fonction g_1 définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$g_1(x) = -(x+1)e^{-x}$$

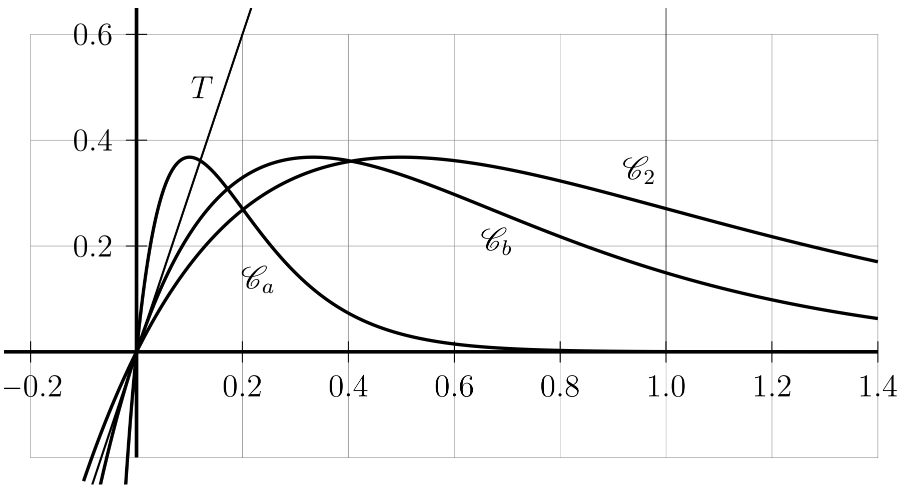
est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4) Étudier le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

5) Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 10$.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathcal{C}_b$ au point O origine du repère.



1) Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathscr{C}_k$ passent par un même point.

2) a) Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f_k'(x) = k(1 - kx)e^{-kx}.$$

b) Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

c) En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.

d) Écrire une équation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ au point O origine du repère.

e) En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.

EXERCICE 3 (4 points)

(commun à tous les candidats)

Une entreprise industrielle fabrique des pièces cylindriques en grande quantité. Pour toute pièce prélevée au hasard, on appelle X la variable aléatoire qui lui associe sa longueur en millimètre et Y la variable aléatoire qui lui associe son diamètre en millimètre.

On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu_1 = 36$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,2$ et que Y suit la loi normale de moyenne $\mu_2 = 6$ et d'écart-type $\sigma_2 = 0,05$.

1) Une pièce est dite conforme pour la longueur si sa longueur est comprise entre $\mu_1 - 3\sigma_1$ et $\mu_1 + 3\sigma_1$.
Quelle est une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité p_1 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour la longueur ?

2) Une pièce est dite conforme pour le diamètre si son diamètre est compris entre $5,88$ mm et $6,12$ mm. Le tableau donné ci-dessous a été obtenu à l'aide d'un tableur. Il indique pour chacune des valeurs de k, la probabilité que Y soit inférieure ou égal à cette valeur.
Déterminer à 10^{-3} près la probabilité p_2 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour le diamètre (on pourra s'aider du tableau ci-dessous).

k	$p(Y \leqslant k)$
$5,8$	$3,167\ 12$ E $- 05$
$5,82$	$0,000\ 159\ 109$
$5,84$	$0,000\ 687\ 138$
$5,86$	$0,002\ 555\ 13$
$5,88$	$0,008\ 197\ 536$
$5,9$	$0,022\ 750\ 132$
$5,92$	$0,054\ 799\ 292$
$5,94$	$0,115\ 069\ 67$
$5,96$	$0,211\ 855\ 399$
$5,98$	$0,344\ 578\ 258$
6	$0,5$
$6,02$	$0,655\ 421\ 742$
$6,04$	$0,788\ 144\ 601$
$6,06$	$0,884\ 930\ 33$
$6,08$	$0,945\ 200\ 708$
$6,1$	$0,977\ 249\ 868$
$6,12$	$0,991\ 802\ 464$
$6,14$	$0,997\ 444\ 87$
$6,16$	$0,999\ 312\ 862$
$6,18$	$0,999\ 840\ 891$
$6,2$	$0,999\ 968\ 329$

3) On prélève une pièce au hasard. On appelle L l'évènement « la pièce est conforme pour la longueur » et D l'évènement « la pièce est conforme pour le diamètre ». On suppose que les évènements L et D sont indépendants.

a) Une pièce est acceptée si elle est conforme pour la longueur et pour le diamètre.
Déterminer la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard ne soit pas acceptée
(le résultat sera arrondi à 10^{-2}).

b) Justifier que la probabilité qu'elle soit conforme pour le diamètre sachant qu'elle n'est pas conforme pour la longueur, est égale à p_2.

EXERCICE 4 (5 points)

(candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

A et X sont des nombres entiers
Saisir un entier positif A
Affecter à X la valeur de A
Tant que X supérieur ou égal à 26
Affecter à X la valeur $X - 26$
Fin du tant que
Afficher X

1) Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 3 ?

2) Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 55 ?

3) Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente le résultat fourni par cet algorithme ?

Partie B

On veut coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante (détaillée en quatre étapes) :

- **Étape 1** : chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

- **Étape 2** : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de codage.

- **Étape 3** : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tel que

$$\begin{cases} z_1 \equiv y_1 \ (26) \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant z_1 \leqslant 25 \\ z_2 \equiv y_2 \ (26) \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant z_2 \leqslant 25 \end{cases}$$

- **Étape 4** : $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple :
RE $\to \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} \to$ DP
Le bloc RE est donc codé en DP

Justifier le passage de $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

1) Soient x_1, x_2, x'_1, x'_2 quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé de codage en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \equiv 3x'_1 + x'_2 \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 \quad (26) \end{array} \right.$.

b) En déduire que $x_1 \equiv x'_1 \quad (26)$ et $x_2 \equiv x'_2 \quad (26)$ puis que $x_1 = x'_1$ et $x_2 = x'_2$.

2) On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

a) Vérifier que la matrice $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de C.

b) Calculer $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

c) Calculer $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tels que $\left\{ \begin{array}{lll} x_1 \equiv y_1 \quad (26) & \text{avec} & 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv y_2 \quad (26) & \text{avec} & 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{array} \right.$.

d) Quel procédé général de décodage peut-on conjecturer ?

3) Dans cette question nous allons généraliser ce procédé de décodage.

On considère un bloc de deux lettres et on appelle z_1 et z_2 les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape 3. On cherche à trouver deux entiers x_1 et x_2 compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ par les étapes 2 et 3 du procédé de codage.

Soient y'_1 et y'_2 tels que $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Soient x_1 et x_2, les nombres entiers tels que $\left\{ \begin{array}{lll} x_1 \equiv y'_1 \quad (26) & \text{avec} & 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv y'_2 \quad (26) & \text{avec} & 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{array} \right.$.

Montrer que $\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 \quad (26) \end{array} \right.$.

Conclure.

4) Décoder QC.