Antilles Guyane. Septembre 2013. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

Restitution organisée de connaissances

• Si Δ est orthogonale à toute droite du plan P, en particulier Δ est orthogonale aux droites D_1 et à D_2.

• Réciproquement, supposons que Δ soit orthogonale aux droites D_1 et à D_2. Il revient au même de dire que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

Soient D une droite du plan P puis $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de D.

Puisque les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont deux droites sécantes du plan P, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan P. Puisque $\overrightarrow{u}$ est un vecteur du plan P, on sait qu'il existe deux réels λ et μ tels que

$$\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}.$$

Mais alors

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}.\left(\lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}\right) = \lambda\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_2} = 0 + 0 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}$ ou encore la droite Δ est orthogonale à D.

On a ainsi montré que si Δ est orthogonale à deux droites sécantes du plan P, alors Δ est orthogonale à toute droite du plan P.

Partie B

Affirmation 1	**VRAI**
Affirmation 2	**FAUX**
Affirmation 3	**VRAI**
Affirmation 4	**VRAI**

Justification 1. Un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\overrightarrow{v}(1, 3, -2)$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(4, -2, -1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-1, -1, -2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan P.

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{AB} = 1 \times 4 + 3 \times (-2) + (-2) \times (-1) = 4 - 6 + 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + 3 \times (-1) + (-2) \times (-2) = -1 - 3 + 4 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ou encore la droite Δ est orthogonale aux droites (AB) et (AC). On en déduit que la droite Δ est orthogonale à toute droite du plan P. L'affirmation 1 est vraie.

Justification 2. Puisque la droite Δ est orthogonale à la droite (AB), les droites Δ et (AB) ne sont pas parallèles et donc sont sécantes ou non coplanaires.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\left\{\begin{array}{l} x = 4u \\ y = -1 - 2u \\ z = 1 - u \end{array}\right.$, $u \in \mathbb{R}$.

Soient $M(t, 3t - 1, -2t + 8)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ et $N(4u, 1 - 2u, 1 - u)$, $u \in \mathbb{R}$, un point de (AB).

$$M = N \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4u \\ 3t - 1 = 1 - 2u \\ -2t + 8 = 1 - u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4u \\ 3(4u) - 1 = 1 - 2u \\ -2(4u) + 8 = 1 - u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4u \\ 14u = 2 \\ 7u = 7 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4u \\ u = \dfrac{1}{7} \\ u = 1 \end{array}\right. .$$

Ce système n'a pas de solution et donc les droites Δ et (AB) ne sont pas sécantes. On en déduit que les droites Δ et (AB) ne sont pas coplanaires. L'affirmation 2 est fausse.

Justification 3. Les points A, B et C définissent un unique plan à savoir le plan (ABC).

- $x_A + 3y_A - 2z_A + 5 = 0 - 3 - 2 + 5 = 0$. Donc le point A appartient au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.
- $x_B + 3y_B - 2z_B + 5 = 4 - 9 + 0 + 5 = 0$. Donc le point B appartient au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.
- $x_C + 3y_C - 2z_C + 5 = -1 - 6 + 2 + 5 = 0$. Donc le point C appartient au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

Ainsi, les points A, B et C appartiennent au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$ et donc le plan (ABC) est le plan d'équation $x + 3y - 2z = 0$. L'affirmation 3 est vraie.

Justification 4. Le plan (ABC) admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}(1, 3, -2)$ et la droite Δ admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}(11\ ;\ -1\ ;\ 4)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 11 \times 1 + (-1) \times 3 + 4 \times (-2) = 11 - 3 - 8 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux et donc la droite D est parallèle au plan d'équation $x+3y-2z+5 = 0$ qui est le plan (ABC). Plus précisément, la droite D est strictement parallèle au plan (ABC) ou incluse dans le plan (ABC). D'autre part,

$$x_O + 3y_O - 2z_0 + 5 = 0 + 0 + 0 + 5 = 0t + 5 = 5.$$

Donc, le point O n'appartient pas au plan d'équation $x+3y-2z+5 = 0$ et on en déduit que la droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$. L'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 2

Partie A : Étude du cas $k = 1$

1) Limite de f en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty.}$$

Limite de f en $+\infty$. Pour tout réel non nul x,

$$f_1(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^x/x}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. En prenant l'inverse, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0.}$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_1$ admet l'axe (Ox) pour asymptote en $+\infty$.

2) La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_1'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc pour tout réel x, $f_1'(x)$ est du signe de $1-x$. On en déduit le tableau de variation de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

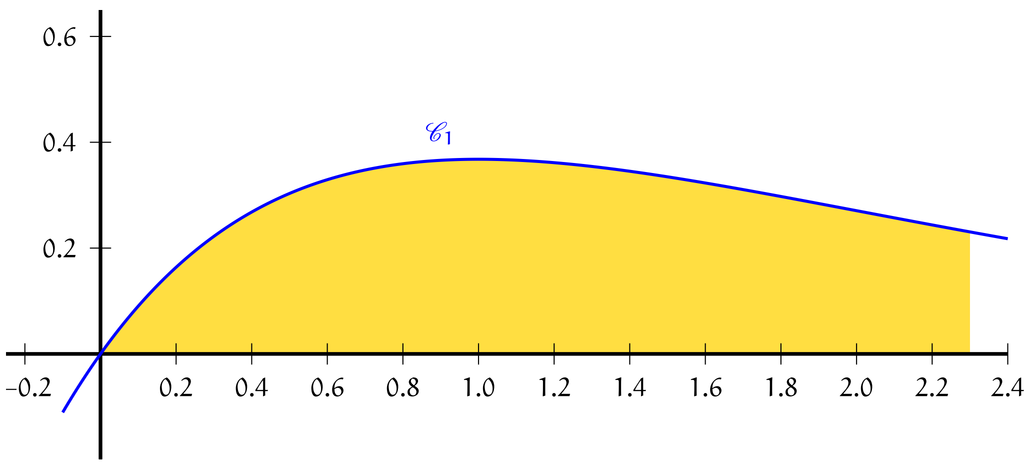
3) La fonction g_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g_1'(x) = -\left(1 \times e^{-x} + (x+1) \times (-1) \times e^{-x}\right) = -(1-x-1)e^{-x} = xe^{-x} = f_1(x).$$

Donc la fonction g_1 est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4) Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$. Donc pour tout réel x, $f_1(x)$ est du signe de x. La fonction f_1 est donc strictement négative sur $]-\infty, 0[$, strictement positive sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0.

5) La fonction f_1 est continue et positive sur l'intervalle $[0, \ln 10]$.



Donc l'aire demandée est

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^{\ln 10} f_1(x)\,dx = [g_1(x)]_0^{\ln 10} = \left(-(\ln 10+1)e^{-\ln 10}\right) - \left(-(0+1)e^0\right)\\ &= -(\ln 10 + 1)\frac{1}{e^{\ln 10}} + 1 = 1 - \frac{\ln 10 + 1}{10} = \frac{9 - \ln 10}{10}.\end{aligned}$$

Partie B : Propriétés graphiques

1) Pour tout réel k strictement positif, $f_k(0) = 0$ et donc pour tout réel k strictement positif, la courbe $\mathscr{C}_k$ passe par O.

2) a) Soit k un réel strictement positif. La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'_k(x) = k\left(1 \times e^{-kx} + x \times (-k) \times e^{-kx}\right) = k(1 - kx)e^{-kx}.$$

b) Pour tout réel x, $f'_k(x)$ est du signe de $1 - kx$. Par suite, puisque $k > 0$, la fonction f'_k est strictement positive sur $\left]-\infty, \frac{1}{k}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{1}{k}, +\infty\right[$ et s'annule en $\frac{1}{k}$.

On en déduit que la fonction f_k admet un maximum en $\frac{1}{k}$ et que ce maximum est égal à

$$f_k\left(\frac{1}{k}\right) = k \times \frac{1}{k} \times e^{-k \times \frac{1}{k}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

c) L'abscisse du sommet de la courbe $\mathscr{C}_a$ est environ $0,1 = \frac{1}{10}$ et donc

$\boxed{a \text{ est environ égal à } 10.}$

d) Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ au point O est $y = f'_k(0)(x - 0) + f_k(0)$ avec $f_k(0) = 0$ et $f'_k(0) = k(1 - 0)e^0 = k$. Donc une équation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ au point O est $y = kx$.

e) Le coefficient directeur de T est $\frac{0,6}{0,2} = 3$ et le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_b$ au point O est b. Donc

$\boxed{b = 3.}$

EXERCICE 3

1) La probabilité demandée est $p_1 = P(35,4 \leqslant X \leqslant 36,6)$. La calculatrice (ou le cours) fournit

$$\boxed{p_1 = 0,997 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut.}}$$

2) D'après le tableau

$$P\left(5,88 \leqslant Y \leqslant 6,12\right) = P\left(Y \leqslant 6,12\right) - P\left(Y \leqslant 5,88\right) = 0,991\ 802\ 464 - 0,008\ 197\ 536 = 0,983\ 604\ 928.$$

Donc

$$\boxed{p_2 = 0,983 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut.}}$$

3) a) La probabilité demandée est $P\left(L \cap D\right)$. Puisque les événements L et D sont indépendants,

$$P\left(L \cap D\right) = P(L) \times P(D) = p_1 \times p_2 = 0,997 \times 0,983 = 0,98 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

$$\boxed{P\left(L \cap D\right) = 0,98 \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

b) La probabilité demandée est $P_L(D)$. Puisque les événements L est D sont indépendants, $P_L(D) = P(D) = p_2$.

EXERCICE 4

Partie A

1) Le nombre 3 est strictement inférieur à 26 et donc l'algorithme s'arrête immédiatement et affiche 3.

Quand on saisit le nombre 3, l'algorithme affiche le nombre 3.

2) La variable X prend successivement les valeurs 55 puis $55 - 26 = 29$ puis $29 - 26 = 3$ puis l'algorithme s'arrête et affiche 3.

Quand on saisit le nombre 55, l'algorithme affiche le nombre 3.

3) L'algorithme retranche un certain nombre de fois 26 à A. Si on note q ce nombre, $A - 26q$ est un entier r compris au sens large entre 0 et 25 ou encore r est le reste de la division euclidienne de A par 26 et l'algorithme affiche r.

Pour un nombre entier A saisi quelconque, le résultat affiché par l'algorithme est le reste de la division euclidienne de A par 26.

Partie B

Justifions le passage de $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 17 + 1 \times 4 \\ 5 \times 17 + 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, $55 = 2 \times 26 + 3$ et donc $55 \equiv 3\ (26)$ avec $0 \leqslant 3 \leqslant 25$. De même, $93 = 3 \times 26 + 15$ et donc $93 \equiv 15\ (26)$ avec $0 \leqslant 15 \leqslant 25$. Donc

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

1) a) x_1 et x_2 sont respectivement transformés en $y_1 = 3x_1 + x_2$ et $y_2 = 5x_1 + 2x_2$. De même, x_1' et x_2' sont respectivement transformés en $y_1' = 3x_1' + x_2'$ et $y_2 = 5x_1' + 2x_2'$.

Puisque $y_1 \equiv z_1\ (26)$ et $y_1' \equiv z_1\ (26)$, on en déduit que $y_1 \equiv y_1'\ (26)$ ou encore que $3x_1 + x_2 \equiv 3x_1' + x_2'\ (26)$. De même, $5x_1 + 2x_2 \equiv 5x_1' + 2x_2'\ (26)$.

On a montré que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3x_1' + x_2'\ (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x_1' + 2x_2'\ (26) \end{cases}$.

b) On en déduit que $2(3x_1 + x_2) - (5x_1 + 2x_2) \equiv 2(3x_1' + x_2') - (5x_1' + 2x_2')\ (26)$ ou encore que $x_1 \equiv x_1'\ (26)$.
De même, $-5(3x_1 + x_2) + 3(5x_1 + 2x_2) \equiv -5(3x_1' + x_2') + 3(5x_1' + 2x_2')\ (26)$ et donc $x_2 \equiv x_2'\ (26)$.

Ainsi, $x_1 \equiv x_1'\ (26)$ avec de plus $0 \leqslant x_1 \leqslant 25$ et $0 \leqslant x_1' \leqslant 25$. On sait alors que $x_1 = x_1'$. De même, $x_2 = x_2'$.

2) a)

$$CC' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 + 1 \times (-5) & 3 \times (-1) + 1 \times 3 \\ 5 \times 2 + 2 \times (-5) & 5 \times (-1) + 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Puisque $CC' = I$, on sait que $C'C = I$ et donc la matrice C est inversible, d'inverse la matrice C'.

b)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3 + (-1) \times 15 \\ (-5) \times 3 + 3 \times 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

c) $-9 \equiv -9 + 26\ (26)$ ou encore $-9 \equiv 17\ (26)$ avec $0 \leqslant 17 \leqslant 25$. De même, $30 \equiv 30 - 26\ (26)$ ou encore $30 \equiv 4\ (26)$ avec $0 \leqslant 4 \leqslant 25$. Donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

d) L'exemple précédent suggère que le décodage d'un message se fait comme son codage, en remplaçant la matrice C par la matrice C' inverse de la matrice C.

3)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_1 - z_2 \\ -5z_1 + 3z_2 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, modulo 26,

$$3x_1 + x_2 \equiv 3y'_1 + y'_2 \equiv 3(2z_1 - z_2) + (-5z_1 + 3z_2) \equiv z_1,$$

et

$$5x_1 + 2x_2 \equiv 5y'_1 + 2y'_2 \equiv 5(2z_1 - z_2) + 2(-5z_1 + 3z_2) \equiv z_2.$$

On a montré que $\left\{\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 \ (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 \ (26) \end{array}\right.$.

Ainsi, le mot représenté par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ se code en le mot représenté par $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. La question 1)b) montre que c'est le seul et donc le mot représenté par $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ se décode en le mot représenté par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

4) Le mot QC est représenté par $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où $z_1 = 16$ et $z_2 = 2$.

$$C'\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -74 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, $30 \equiv 30 - 26 \ (26)$ ou encore $30 \equiv 4 \ (26)$ avec $0 \leqslant 4 \leqslant 25$. Donc $x_1 = 4$.
De même, $-74 \equiv -74 + 3 \times 26 \ (26)$ ou encore $-74 \equiv 4 \ (26)$. Donc, $x_2 = 4$. Puisque le nombre 4 correspond à la lettre E,

$$\boxed{\text{le mot QP se décode en le mot EE.}}$$

