Rochambeau 2013. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $(1,-1,-1)$ et $(2,-5,-3)$.

S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors $k = 2$ à partir de la première coordonnée et $-k = -5$ ou encore $k = 5$ à partir de la deuxième coordonnée. Ceci est impossible et il n'existe donc pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore

les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Ainsi, les trois points A, B et C définissent un unique plan.

a)

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + (-1) \times (-1) + 3 \times (-1) = 2 + 1 - 3 = 0$$

et

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 2 + (-1) \times (-5) + 3 \times (-3) = 4 + 5 - 9 = 0.$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et donc le le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal au plan (ABC) ou encore

la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

b) Le plan (ABC) est le plan passant par $A(0,4,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2,-1,3)$. Une équation cartésienne de ce plan est $2(x-0) - (y-4) + 3(z-1) = 0$ ou encore

une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + 3z + 1 = 0$.

c) Δ est la droite passant par $D(7,-1,4)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2,-1,3)$. Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.}$$

d) Soit $M(7+2t, -1-t, 4+3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 2(7+2t) - (-1-t) + 3(4+3t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 14t + 28 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Quand $t = -2$, on obtient le point de coordonnées $(3,1,-2)$.

Le point H a pour coordonnées $(3,1,-2)$.

3) a) $\mathscr{P}_1$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}(1,1,1)$ et $\mathscr{P}_1$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}(1,4,0)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires et donc

les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants en une droite.

b) Soit $M(-4t-2, t, 3t+2)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de d.

$$(-4t-2) + (t) + (3t+2) = 0$$

et

$$(-4t-2) + 4(t) + 2 = 0.$$

Ainsi, tout point de d appartient à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ et donc

la droite d est la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

c) Un vecteur directeur de la droite d est le vecteur $\overrightarrow{u'}(-4, 1, 3)$ et un vecteur normal au plan (ABC) est le vecteur $\overrightarrow{u}(2, -1, 3)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}' = 2 \times (-4) + (-1) \times 1 + 3 \times 3 = -8 - 1 + 9 = 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{la droite } d \text{ est parallèle au plan } (ABC).}$$

EXERCICE 2

1) a) La calculatrice fournit $u_1 = \sqrt{2} = 1,4142\ldots$, $u_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = 1,6817\ldots$, $u_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 1,8340\ldots$

$$\boxed{\text{Quand } n = 3\text{, l'algortihme affiche la valeur de } u_3 \text{ c'est-à-dire } 1,8340 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}}$$

b) L'algorithme demande un entier n et affiche la valeur de u_n (pour $n \geqslant 1$).

c) Il semblerait que la suite (u_n) soit strictement croissante et converge vers 2.

2) a) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

- $u_0 = 1$ et $0 < 1 \leqslant 2$. Donc l'encadrement à démontrer est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $0 < u_n \leqslant 2$ et montrons que $0 < u_{n+1} \leqslant 2$.

$$\begin{aligned}
0 < u_n \leqslant 2 &\Rightarrow 0 < 2u_n \leqslant 4 \\
&\Rightarrow \sqrt{0} < \sqrt{2u_n} \leqslant \sqrt{4} \text{ (par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ sur }]0, +\infty[) \\
&\Rightarrow 0 < u_{n+1} \leqslant 2.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 < u_n \leqslant 2.}$$

b) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
2 \geqslant u_n &\Rightarrow 2u_n \geqslant u_n^2 \text{ (car } u_n \geqslant 0) \\
&\Rightarrow \sqrt{2u_n} \geqslant \sqrt{u_n^2} \\
&\Rightarrow u_{n+1} \geqslant u_n \ (\sqrt{u_n^2} = u_n \text{ car } u_n \geqslant 0).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2 et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - \ln 2 = \ln\left(\sqrt{2u_n}\right) - \ln 2 = \frac{1}{2}\ln(2u_n) - \ln 2 \\
&= \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln(u_n)) - \ln 2 = \frac{1}{2}(\ln 2 + v_n + \ln 2) - \ln 2 = \frac{1}{2}v_n + \ln 2 - \ln 2 \\
&= \frac{1}{2}v_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$. De plus, $v_0 = \ln(u_0) - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$.

On a montré que

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est la suite géométrique de raison } \frac{1}{2} \text{ et de premier terme } v_0 = -\ln 2.}$$

b) On sait alors que pour tout entier naturel n

$$v_n = v_0 \times q^n = -\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{\ln 2}{2^n}.$$

Pour tout entier naturel n,

$$v_n = \ln(u_n) - \ln 2 \Rightarrow \ln(u_n) = \ln 2 + v_n \Rightarrow u_n = e^{\ln 2 + v_n} \Rightarrow u_n = e^{\ln 2} \times e^{v_n} \Rightarrow u_n = 2 \times e^{v_n}$$

et par suite, $u_n = 2e^{-\frac{\ln 2}{2^n}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = 2e^{-\frac{\ln 2}{2^n}}.}$$

c) Puisque $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\ln 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ puis

$$\lim_{n\to+\infty}\exp\left(-\ln 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \lim_{X\to 0} e^X = e^0 = 1$$

et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2\exp\left(-\ln 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2.}$$

d) Algorithme.

Variables :	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 1

Traitement :	Tant que $u \leqslant 1,999$ faire
	    Affecter à n la valeur $n+1$
	    Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher n

EXERCICE 3

Partie A

1) $P(390 \leqslant X \leqslant 410) = P(X \leqslant 410) - (X < 390) = P(X \leqslant 410) - (X \leqslant 390) = 0,818 - 0,182 = 0,636$.

$$\boxed{P(390 \leqslant X \leqslant 410) = 0,636.}$$

2)

$$p = p\,(X \geqslant 385) = 1 - p(X < 385) = 1 - p(X \leqslant 385) = 1 - 0,086 = 0,914.$$

$$\boxed{p = 0,914.}$$

3) Posons $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-400}{\sigma}$. On sait que Z suit la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire la loi normale de moyenne 1 et d'écart-type 0.

$$X \geqslant 385 \Leftrightarrow X - 400 \geqslant -15 \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \geqslant -\frac{15}{\sigma} \Leftrightarrow Z \geqslant -\frac{15}{\sigma}.$$

L'énoncé donne $p(Z \leqslant -1,751) = 0,04$ (arrondi au millième) ou encore $p(Z \geqslant -1,751) = 0,96$. Par suite,

$$p(X \geqslant 385) = 0,96 \Leftrightarrow p\left(Z \geqslant -\frac{15}{\sigma}\right) = 0,96 \Leftrightarrow p\left(Z \geqslant -\frac{15}{\sigma}\right) = p(Z \geqslant -1,751).$$

D'après le cours, on sait que cette dernière égalité équivaut à $-\dfrac{15}{\sigma} = -1,751$ ou encore $\sigma = \dfrac{15}{1,751}$ ou enfin

$$\boxed{\sigma = 8,6 \text{ arrondi au dixième.}}$$

Partie B

1) Ici, $n = 300$ et $p = 0,96$. On note que $n \geqslant 30$ puis $np = 288$ et $n(1-p) = 12$ de sorte que $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300 est

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,96 - 1,96\frac{\sqrt{0,96 \times 0,04}}{\sqrt{300}}, 0,96 + 1,96\frac{\sqrt{0,96 \times 0,04}}{\sqrt{300}}\right].$$

En arrondissant les bornes à 10^{-3} près de manière à élargir un peu cet intervalle, on trouve

$$\boxed{I = [0,937; 0,983].}$$

2) Faisons l'hypothèse que la proportion de pains commercialisables est $p = 0,96$. La fréquence de pains commercialisables observée dans l'échantillon est $f = \dfrac{283}{300}$ ou encore $0,943$ arrondi au millième.

f appartient à l'intervalle de fluctuation I. On peut donc accepter l'hypothèse faite sur p mais on ne connaît pas le risque de se tromper ou encore

$$\boxed{\text{on peut décider que l'objectif est atteint mais on ne connaît pas le risque de se tromper.}}$$

Partie C

1) On sait que pour tout réel t,

$$p\,(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t},$$

et donc aussi

$$p\,(T \geqslant t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}.$$

L'énoncé donne $p(T \geqslant 30) = 0,913$. Par suite,

$$p\,(T \geqslant 30) = 0,913 \Leftrightarrow e^{-30\lambda} = 0,913$$
$$\Leftrightarrow -30\lambda = \ln\,(0,913) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,913)}{30}.$$

La calculatrice fournit

$$\boxed{\lambda = 0,003 \text{ arrondi au millième.}}$$

Dans toute la suite, on prendra $\lambda = 0,003$.

2) La probabilité demandée est $p_{X \geqslant 60}\,(X \geqslant 90)$.

$$p_{X \geqslant 60}\,(X \geqslant 90) = \frac{p\,((X \geqslant 60) \cap (X \geqslant 90))}{p\,(X \geqslant 60)} = \frac{p\,(X \geqslant 90)}{p\,(X \geqslant 60)}$$
$$= \frac{e^{-0,27}}{e^{-0,18}} = e^{-0,27-(-0,18)} = e^{-0,09}.$$

La calculatrice fournit

$$\boxed{p_{X \geqslant 60}\,(X \geqslant 90) = e^{-0,09} = 0,914 \text{ arrondi au millième.}}$$

3) En considérant qu'une année compte 365 jours, la probabilité que la balance ne se dérègle pas avant un an est $p(X \geqslant 365)$. Or,

$$p(X \geqslant 365) = e^{-0,003 \times 365} = e^{-1,095} = 0,335 \text{ arrondi au millième.}$$

Cette probabilité est nettement inférieure à $0,5$ ou encore il y a nettement moins d'une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an.

Soit t un réel.

$$p(X \geqslant t) = 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,003t} = 0,5 \Leftrightarrow -0,003t = \ln(0,5) \Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0,5)}{0,003}.$$

La calculatrice fournit $-\dfrac{\ln(0,5)}{0,003} = 231,04\ldots$ soit environ 231 jours ou encore 7 mois et demi environ.

$$\boxed{\text{Il y a une chance sur deux que la balance ne se dérègle pas avant 231 jours.}}$$

EXERCICE 4

1) a) Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \times (1 + \ln(x))$. Or, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et d'autre part, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (1 + \ln(x)) = -\infty$.

En multipliant, on obtient $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x^2}(1 + \ln(x)) = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty.}$$

b) D'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{x}$.
Ensuite, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. En multipliant, on obtient $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{x} = 0$.
Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, en additionnant on obtient

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

c) On en déduit que l'axe (Ox) est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

2) a) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$. De plus, pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{x^2}\right)'(1 + \ln(x)) + \frac{1}{x^2}(1 + \ln(x))' = -\frac{2}{x^3}(1 + \ln(x)) + \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{-2 - 2\ln(x) + 1}{x^3} = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ f'(x) = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}.}$$

b) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} -1 - 2\ln(x) > 0 &\Leftrightarrow -2\ln(x) > 1 \Leftrightarrow \ln(x) < -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}} \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ -1 - 2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}}.}$$

Pour tout réel $x > 0$, on a $x^3 > 0$ et donc pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-1 - 2\ln(x)$.
D'après ce qui précède, la fonction f' est strictement positive sur $\left]0, e^{-1/2}\right[$, strictement négative sur $\left]e^{-1/2}, +\infty\right[$ et s'annule en $e^{-1/2}$.

c) D'autre part,

$$f\left(e^{-1/2}\right) = \frac{1}{\left(e^{-1/2}\right)^2} \times \left(1 + \ln\left(e^{-1/2}\right)\right) = \frac{1}{e^{-1}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}.$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$e/2$	↘	0

3) a) Soit x un réel strictement positif.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}(1+\ln(x)) = 0 \Leftrightarrow 1+\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}.$$

La courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, à savoir le point de coordonnées $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$.

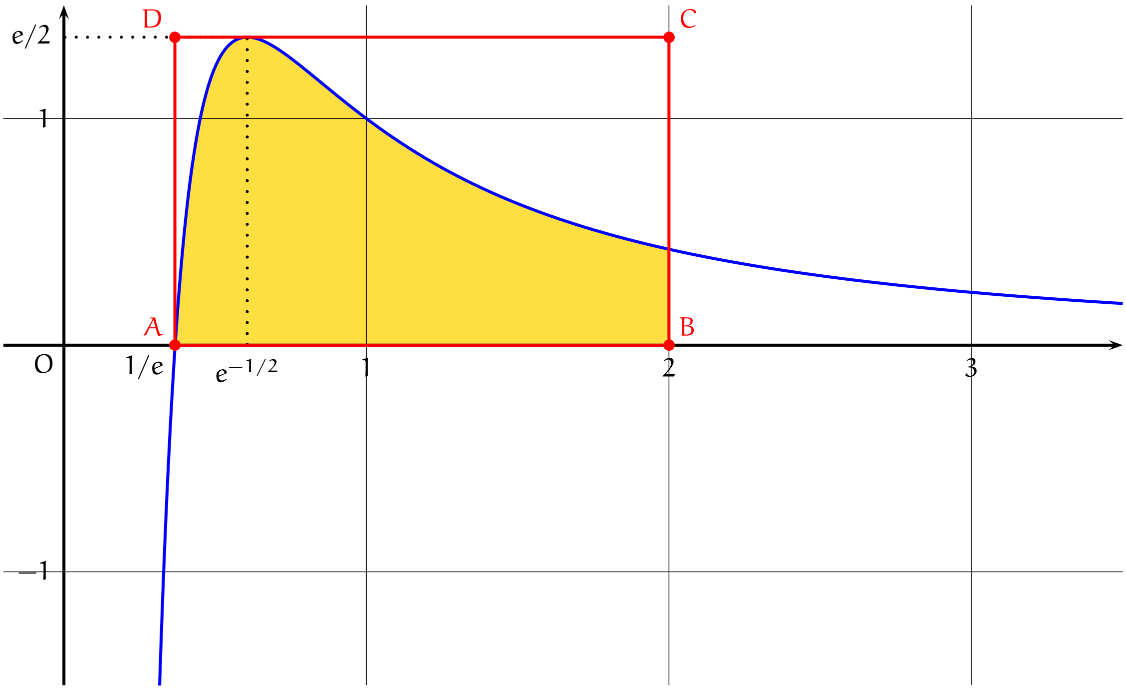
b) Pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{1}{x^2} > 0$. Donc, pour tout réel $x > 0$, $f(x)$ est du signe de $1 + \ln(x)$. D'après la question précédente, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = 0$ équivaut à $x = e^{-1}$. D'autre part, pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\Leftrightarrow\Leftrightarrow 1+\ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \\ &\Leftrightarrow x > e^{-1} \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Finalement, la fonction f est strictement négative sur $\left]0, e^{-1}\right[$, strictement positive sur $\left]e^{-1}, +\infty\right[$ et s'annule en e^{-1}.

4) a) La fonction f est continue et positive sur $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Donc $I_2 = \int_{1/e}^{2} f(x)\,dx$.

Notons A, B, C et D les points de coordonnées respectives $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$, $(2, 0)$, $\left(2, \frac{e}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{e}, \frac{e}{2}\right)$.



On a alors

$$0 \leqslant I_2 \leqslant \text{aire de } ABCD = \left(2 - \frac{1}{e}\right) \times \frac{e}{2} = e - \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{0 \leqslant I_2 \leqslant e - \frac{1}{2}.}$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{1/e}^{n} f(x)\,dx = [F(x)]_{1/e}^{n} = \left(\frac{-2-\ln(n)}{n}\right) - \left(\frac{-2-\ln(1/e)}{1/e}\right) = \frac{-2-\ln(n)}{n} - \left(\frac{-2+1}{1/e}\right) \\ &= e - \frac{2+\ln(n)}{n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ I_n = e - \frac{2+\ln(n)}{n}.}$$

c) Pour tout entier naturel non nul n, $e - \dfrac{2+\ln(n)}{n} = e - \dfrac{2}{n} - \dfrac{\ln(n)}{n}$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ et d'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = e - 0 - 0 = e$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = e.}$$

e est l'aire du « domaine infini » délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et la droite d'équation $x = \dfrac{1}{e}$.