

Pondichéry 2013. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie 1

Soient a et b deux réels puis h la fonction définie par : pour tout réel t , $h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,04t}}$.

Les conditions de l'énoncé s'écrivent $h(0) = 0,1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 2$.

Tout d'abord, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,04t} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = \frac{a}{1 + b \times 0} = a$. Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 2 \Leftrightarrow a = 2$.

Ensuite, $h(0) = \frac{a}{1 + be^0} = \frac{2}{1 + b}$ puis

$$h(0) = 0,1 \Leftrightarrow \frac{2}{1 + b} = 0,1 \Leftrightarrow 2 = 0,1b + 0,1 \Leftrightarrow 0,1b = 1,9 \Leftrightarrow b = 19.$$

En résumé, h correspond à la croissance du plan de maïs étudié si et seulement si

$$\text{pour tout réel } t, h(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}.$$

Partie 2

1) f est dérivable sur $[0, 250]$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $[0, 250]$ et ne s'annulant pas sur $[0, 250]$. De plus, pour tout réel t de $[0, 250]$,

$$f'(t) = 2 \times -\frac{19 \times (-0,04)e^{-0,04t}}{(1 + 19e^{-0,04t})^2} = \frac{1,52 e^{-0,04t}}{(1 + 19e^{-0,04t})^2}.$$

Pour tout réel t de $[0, 250]$, $1,52 e^{-0,04t} > 0$ et $(1 + 19e^{-0,04t})^2 > 0$. Par suite, pour tout réel t de $[0, 250]$, $h'(t) > 0$.

On en déduit que la fonction h est strictement croissante sur $[0, 250]$.

2) Soit t un réel de l'intervalle $[0, 250]$.

$$\begin{aligned} h(t) \geq 1,5 &\Leftrightarrow \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}} \geq 1,5 \Leftrightarrow 2 \geq 1,5 + 28,5e^{-0,04t} \quad (\text{car } 1 + 19e^{-0,04t} > 0) \\ &\Leftrightarrow 28,5e^{-0,04t} \leq 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,04t} \leq \frac{0,5}{28,5} \Leftrightarrow e^{-0,04t} \leq \frac{1}{57} \\ &\Leftrightarrow -0,04t \leq \ln\left(\frac{1}{57}\right) \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow -0,04t \leq -\ln(57) \Leftrightarrow 0,04t \geq \ln(57) \\ &\Leftrightarrow t \geq 25 \ln(57). \end{aligned}$$

Le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 m est $t_0 = 25 \ln(57) = 101,07 \dots$ (et donc $t_0 \in [0, 250]$) soit à partir de 102 jours.

3) a) Soit t un réel appartenant à l'intervalle $[0, 250]$.

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}} = \frac{2}{1 + \frac{19}{e^{0,04t}}} = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}.$$

Pour tout réel t de $[0, 250]$, $e^{0,04t} + 19 > 0$. Donc, la fonction F est dérivable sur $[0, 250]$ et pour tout réel t de $[0, 250]$,

$$F'(t) = 50 \times \frac{(e^{0,04t} + 19)'}{e^{0,04t} + 19} = 50 \times \frac{0,04e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19} = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19} = f(t).$$

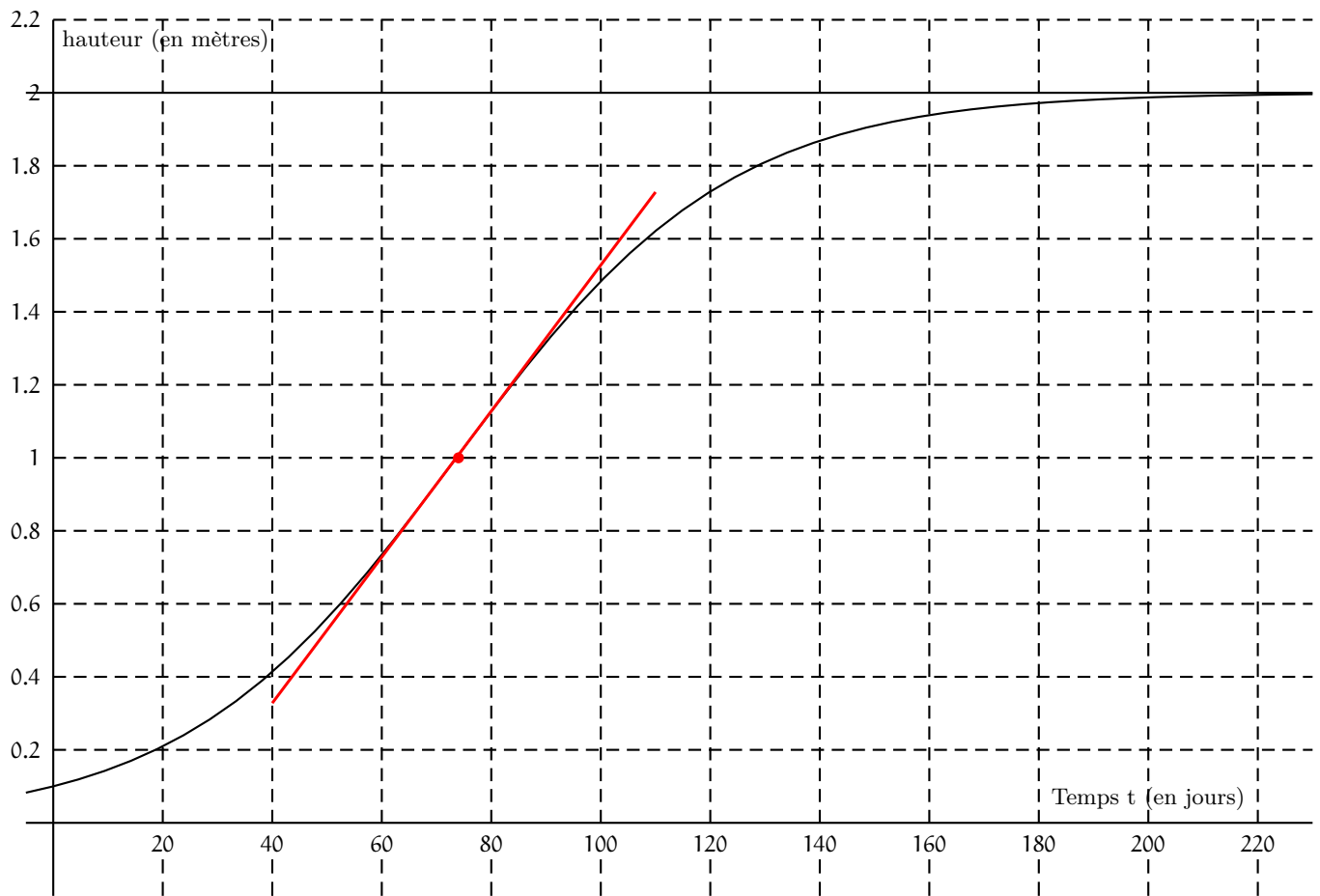
Donc, la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0, 250]$.

b) La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50, 100]$ est

$$\frac{1}{100 - 50} \int_{50}^{100} f(t) dt = \frac{1}{50} [F(t)]_{50}^{100} = \ln(e^4 + 19) - \ln(e^2 + 19) = \ln\left(\frac{e^4 + 19}{e^2 + 19}\right).$$

Une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de cette valeur moyenne est 1,02. Donc, entre 50 et 100 jours, le plan de maïs atteint en moyenne 1,02 m de haut.

4) La vitesse de croissance est maximale quand la pente de la tangente au point d'abscisse t est maximale. Sur le graphique, cela semble correspondre à une hauteur de 1 m et une durée de 75 jours.



EXERCICE 2

- 1) réponse b)
- 2) réponse c)
- 3) réponse a)
- 4) réponse b)

Explication 1. L'ensemble de représentation paramétrique a) est une droite et ne convient donc pas.

Le plan de représentation c) passe par le point de coordonnées $(0, 1, 1)$ (obtenu pour $t = t' = 0$). Ce point n'appartient pas au plan (P) car $1 \times 0 - 2 \times 1 + 3 \times 1 + 5 = 6 \neq 0$. La représentation c) ne convient pas.

Le plan de représentation d) passe par le point de coordonnées $(1, 1, -1)$. Ce point n'appartient pas au plan (P) car $1 \times 1 - 2 \times 1 + 3 \times (-1) + 5 = 1 \neq 0$. La représentation d) ne convient pas.

Une représentation paramétrique du plan (P) est donc la représentation b) :
$$\begin{cases} x = t + 2t' \\ y = 1 - t + t' \\ z = -1 - t \end{cases} .$$

Vérifions-le explicitement. Le plan de représentation b) passe par le point de coordonnées $(0, 1, -1)$.

Puisque $1 \times 0 - 2 \times 1 + 3 \times (-1) + 5 = 0$, ce point appartient au plan (P).

Un vecteur normal au plan (P) est le vecteur $\vec{n}(1, -2, 3)$. Les vecteurs $\vec{u}(1, -1, -1)$ et $\vec{v}(2, 1, 0)$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan de représentation b). Or,

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 \times 1 + (-2) \times (-1) + 3 \times (-1) = 1 + 2 - 3 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 1 \times 2 + (-2) \times 1 + 3 \times 0 = 2 - 2 = 0.$$

Le vecteur \vec{n} est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan de représentation b) qui a par ailleurs un point commun avec le plan (P). Le plan (P) est donc effectivement le plan de représentation b). La bonne réponse est la réponse b).

Explication 2. Soient $t \in \mathbb{R}$ puis $M(-2 + t, -t, -1 - t)$ un point quelconque de (D).

$$(-2 + t) - 2(-t) + 3(-1 - t) + 5 = t + 2t - 3t - 2 - 3 + 5 = 0.$$

Donc $M \in (P)$. Ainsi, tout point de (D) appartient à (P) ou encore la droite (D) est une droite du plan (P). La bonne réponse est la réponse c).

Explication 3. Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{MN} sont $(2, -4, 6)$. La droite (D) admet pour vecteur directeur le vecteur \vec{u} de coordonnées $(1, -1, -1)$. Ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur \overrightarrow{MN} et donc les droites (MN) et (D) ne sont pas parallèles. Ceci élimine les propositions b) et d).

D'autre part

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = 1 \times 2 + (-1) \times (-4) + (-1) \times 6 = 2 + 4 - 6 = 0.$$

Donc, les droites (D) et (MN) sont orthogonales. La bonne réponse est la réponse a).

Explication 4. Soit $Q(-2 + t + 2t', -t - 2t', -1 - t + 3t')$, t et t' réels, un point de (S).

$$Q \in (P) \Leftrightarrow (-2 + t + 2t') - 2(-t - 2t') + 3(-1 - t + 3t') + 5 = 0 \Leftrightarrow 15t' = 0 \Leftrightarrow t' = 0.$$

Les points communs aux plans (P) et (S) sont les points de coordonnées $(-2 + t, -t, -1 - t)$, $t \in \mathbb{R}$. $(P) \cap (S)$ est donc

la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
 On note que $(P) \cap (S)$ et (Δ) admettent un vecteur

directeur commun à savoir le vecteur de coordonnées $(1, -1, -1)$. Donc $(P) \cap (S)$ est une droite parallèle à (Δ) .

Enfin, le point de coordonnées $(0, -2, -3)$ est un point commun à $(P) \cap (S)$ (obtenu pour $t = 2$) et à (Δ) (obtenu pour $t = 0$). Donc $(P) \cap (S)$ est la droite (Δ) . La bonne réponse est la réponse b).

EXERCICE 3

1) a) $Z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$

$$Z_M = 1 - i\sqrt{3}.$$

b) $Z_{M'} = -iZ_M = -i(1 - i\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - i.$

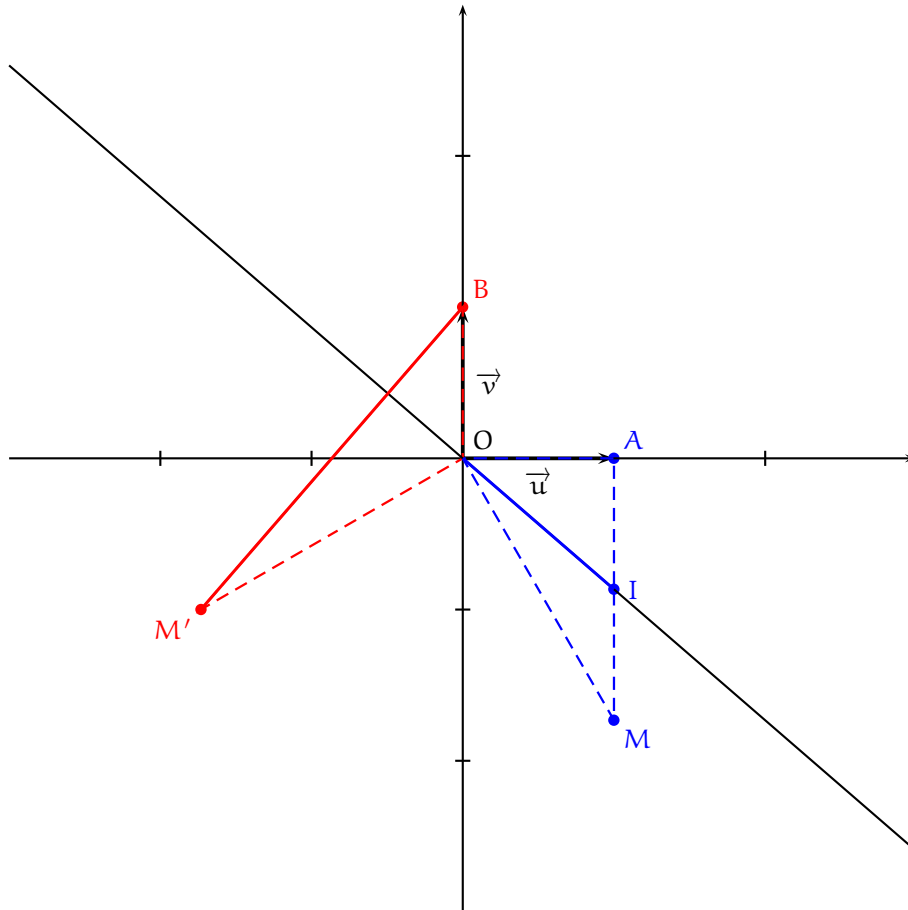
$$Z_{M'} = -\sqrt{3} - i.$$

$|Z_{M'}| = |-\sqrt{3} - i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ puis

$$Z_{M'} = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right) = 2e^{-5i\pi/6}.$$

Le module de $Z_{M'}$ est 2 et un argument de $Z_{M'}$ est $-\frac{5\pi}{6}$.

c) La droite (OI) semble être perpendiculaire à la droite (BM') et la distance BM' semble être le double de la distance OI.



2) On pose $Z_M = x + iy$ avec x et y réels tels que $y \neq 0$.

a) $z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_M) = \frac{1}{2}(1 + x + iy) = \frac{1+x}{2} + i\frac{y}{2}.$

$$Z_I = \frac{1+x}{2} + i\frac{y}{2}.$$

b) $z_{M'} = -iz_M = -i(x + iy) = y - ix.$

$$Z_{M'} = y - ix.$$

c) Les coordonnées des points I, B et M' sont respectivement $\left(\frac{1+x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, (0, 1) et (y, -x).

d) Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{OI} sont $\left(\frac{1+x}{2}, \frac{y}{2}\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BM'}$ sont (y, -x - 1). Par suite,

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BM'} = \frac{1+x}{2} \times y + \frac{y}{2} \times (-x-1) = \frac{(1+x)y - y(1+x)}{2} = 0.$$

Donc, la droite (OI) est perpendiculaire à la droite (BM') ou encore

la droite (OI) est la hauteur issue de O du triangle OBM'.

e) $BM'^2 = \|\overrightarrow{BM'}\|^2 = y^2 + (-x-1)^2 = y^2 + (-(x+1))^2 = (x+1)^2 + y^2.$

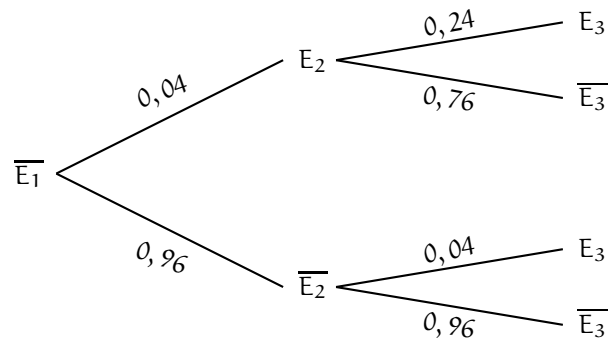
$$OI^2 = \|\overrightarrow{OI}\|^2 = \frac{1}{4} ((x+1)^2 + y^2).$$

Donc, $BM'^2 = 4OI^2$ et finalement

$$BM' = 2OI.$$

EXERCICE 4

1) a) Représentons la situation par un arbre (E_1 est impossible et donc $\overline{E_1}$ est certain).



La probabilité demandée est $p_3 = p(E_3)$. La formule des probabilités totales fournit

$$\begin{aligned} p_3 &= p(E_2 \cap E_3) + p(\overline{E_2} \cap E_3) = p(E_2) \times p_{E_2}(E_3) + p(\overline{E_2}) \times p_{\overline{E_2}}(E_3) \\ &= 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = 0,0096 + 0,0384 = 0,048. \end{aligned}$$

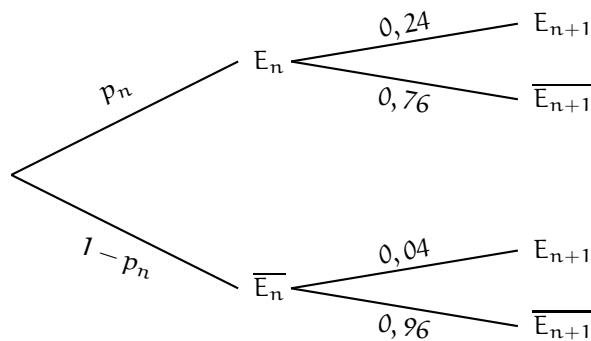
$$p_3 = 0,048.$$

b) La probabilité demandée est $p_{E_3}(E_2)$.

$$p_{E_3}(E_2) = \frac{p(E_2 \cap E_3)}{p(E_3)} = \frac{p(E_2) \times p_{E_2}(E_3)}{p(E_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \frac{0,0096}{0,048} = \frac{96}{480} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

$$p_{E_3}(E_2) = 0,2.$$

2) a)



b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. D'après la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p(E_n) \times p_{E_n}(E_{n+1}) + p(\overline{E_n}) \times p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = 0,24p_n + 0,04(1 - p_n) \\ &= 0,2p_n + 0,04. \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout } n \text{ supérieur ou égal à } 1, p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04.$$

c) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = 0,2u_n.$$

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $r = 0,2$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,05 = -0,05$.

On sait alors que pour tout entier naturel non nul n ,

$$u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1},$$

et donc

$$p_n = u_n + 0,05 = 0,05 - 0,05 \times 0,2^{n-1}.$$

pour tout n supérieur ou égal à 1, $p_n = 0,05 - 0,05 \times 0,2^{n-1}$.

d) Puisque $-1 < 0,2 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^{n-1} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,05.$$

e) A l'étape 1, P contient p_1 et plus généralement, à l'étape $j \geq 1$, P contient p_j . L'algorithme s'arrête dès que la variable J contient un numéro j tel que $p_j \geq 0,05 - 10^{-k}$ (où k est la valeur entrée dans la variable K). A partir de ce numéro, tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à $0,05 - 10^{-k}$.

L'algorithme affiche donc le plus petit numéro j tel que $p_j \geq 0,05 - 10^{-k}$.

Puisque la suite (p_n) converge vers $0,05$, pour tout entier naturel K , il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $p_n \geq 0,05 - 10^{-K}$. On en déduit que cet algorithme s'arrête.

3) a) X suit une loi binomiale. En effet,

- 220 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « le salarié est malade » avec une probabilité $p = 0,05$ et « le salarié n'est pas malade » avec une probabilité $p = 1 - 0,05 = 0,95$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 220$ et $p = 0,05$.

On sait que $\mu = np = 220 \times 0,05 = 11$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10,45} = 3,23$ à 10^{-2} près.

b) La probabilité demandée est $p(7 \leq X \leq 15)$. Or,

$$7 \leq X \leq 15 \Leftrightarrow \frac{7-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{15-\mu}{\sigma}.$$

La probabilité demandée est donc aussi $p\left(\frac{7-11}{\sqrt{10,45}} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{15-11}{\sqrt{10,45}}\right)$ ou encore $p\left(-1,24 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1,24\right)$ en arrondissant les bornes de l'encadrement à 10^{-2} .

L'énoncé nous dit que cette probabilité est environ :

$$\begin{aligned} p(-1,24 \leq Z \leq 1,24) &= p(Z \leq 1,24) - p(Z \leq -1,24) = p(Z < 1,24) - p(Z < -1,24) \\ &= 0,892 - 0,108 = 0,784. \end{aligned}$$

La probabilité demandée vaut environ 0,784.