Pondichéry 2013. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie 1

Soient a et b deux réels puis h la fonction définie par : pour tout réel t, $h(t) = \dfrac{a}{1+be^{-0,04t}}$.

Les conditions de l'énoncé s'écrivent $h(0) = 0,1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 2$.

Tout d'abord, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,04t} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = \dfrac{a}{1+b\times 0} = a$. Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 2 \Leftrightarrow a = 2$.

Ensuite, $h(0) = \dfrac{a}{1+be^{0}} = \dfrac{2}{1+b}$ puis

$$h(0) = 0,1 \Leftrightarrow \frac{2}{1+b} = 0,1 \Leftrightarrow 2 = 0,1b + 0,1 \Leftrightarrow 0,1b = 1,9 \Leftrightarrow b = 19.$$

En résumé, h correspond à la croissance du plan de maïs étudié si et seulement si

$$\text{pour tout réel } t,\ h(t) = \frac{2}{1+19e^{-0,04t}}.$$

Partie 2

1) f est dérivable sur $[0,250]$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $[0,250]$ et ne s'annulant pas sur $[0,250]$. De plus, pour tout réel t de $[0,250]$,

$$f'(t) = 2\times -\frac{19\times(-0,04)e^{-0,04t}}{(1+19e^{-0,04t})^2} = \frac{1,52\ e^{-0,04t}}{(1+19e^{-0,04t})^2}.$$

Pour tout réel t de $[0,250]$, $1,52\ e^{-0,04t} > 0$ et $\left(1+19e^{-0,04t}\right)^2 > 0$. Par suite, pour tout réel t de $[0,250]$, $h'(t) > 0$.

On en déduit que la fonction h est strictement croissante sur $[0,250]$.

2) Soit t un réel de l'intervalle $[0,250]$.

$$\begin{aligned}
h(t) \geqslant 1,5 &\Leftrightarrow \frac{2}{1+19e^{-0,04t}} \geqslant 1,5 \Leftrightarrow 2 \geqslant 1,5 + 28,5e^{-0,04t} \text{ (car } 1+19e^{-0,04t} > 0)\\
&\Leftrightarrow 28,5e^{-0,04t} \leqslant 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,04t} \leqslant \frac{0,5}{28,5} \Leftrightarrow e^{-0,04t} \leqslant \frac{1}{57}\\
&\Leftrightarrow -0,04t \leqslant \ln\left(\frac{1}{57}\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow -0,04t \leqslant -\ln(57) \Leftrightarrow 0,04t \geqslant \ln(57)\\
&\Leftrightarrow t \geqslant 25\ln(57).
\end{aligned}$$

Le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à $1,5$ m est $t_0 = 25\ln(57) = 101,07\ldots$ (et donc $t_0 \in [0,250]$) soit à partir de 102 jours.

3) a) Soit t un réel appartenant à l'intervalle $[0,250]$.

$$f(t) = \frac{2}{1+19e^{-0,04t}} = \frac{2}{1+\dfrac{19}{e^{0,04t}}} = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}.$$

Pour tout réel t de $[0,250]$, $e^{0,04t} + 19 > 0$. Donc, la fonction F est dérivable sur $[0,250]$ et pour tout réel t de $[0,250]$,

$$F'(t) = 50\times\frac{\left(e^{0,04t}+19\right)'}{e^{0,04t}+19} = 50\times\frac{0,04e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19} = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19} = f(t).$$

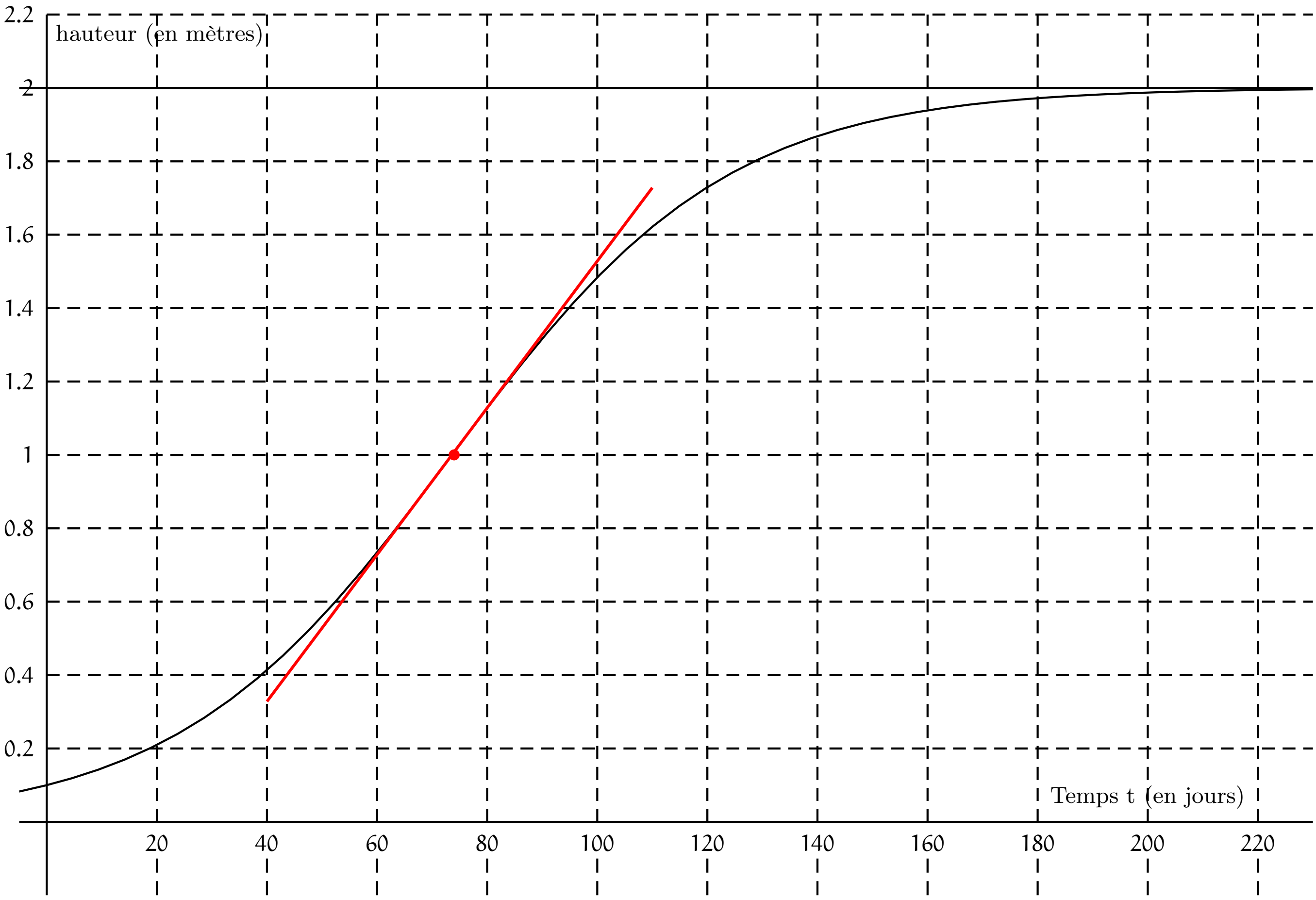
Donc, la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0,250]$.

b) La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50,100]$ est

$$\frac{1}{100-50}\int_{50}^{100} f(t)\ dt = \frac{1}{50}\left[F(t)\right]_{50}^{100} = \ln\left(e^4+19\right) - \ln\left(e^2+19\right) = \ln\left(\frac{e^4+19}{e^2+19}\right).$$

Une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de cette valeur moyenne est $1,02$. Donc, entre 50 et 100 jours, le plan de maïs atteint en moyenne $1,02$ m de haut.

4) La vitesse de croissance est maximale quand la pente de la tangente au point d'abscisse t est maximale.
Sur le graphique, cela semble correspondre à une hauteur de 1 m et une durée de 75 jours.


hauteur (en mètres)
Temps t (en jours)
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220

EXERCICE 2

1) réponse b)

2) réponse c)

3) réponse a)

4) réponse b)

Explication 1. L'ensemble de répresentation paramétrique a) est une droite et ne convient donc pas.

Le plan de représentation c) passe par le point de coordonnées $(0, 1, 1)$ (obtenu pour $t = t' = 0$). Ce point n'appartient pas au plan (P) car $1 \times 0 - 2 \times 1 + 3 \times 1 + 5 = 6 \neq 0$. La représentation c) ne convient pas.

Le plan de représentation d) passe par le point de coordonnées $(1, 1, -1)$. Ce point n'appartient pas au plan (P) car $1 \times 1 - 2 \times 1 + 3 \times (-1) + 5 = 1 \neq 0$. La représentation d) ne convient pas.

Une représentation paramétrique du plan (P) est donc la représentation b) : $\left\{\begin{array}{l} x = t + 2t' \\ y = 1 - t + t' \\ z = -1 - t \end{array}\right.$.

Vérifions-le explicitement. Le plan de représentation b) passe par le point de coordonnées $(0, 1, -1)$.
Puisque $1 \times 0 - 2 \times 1 + 3 \times (-1) + 5 = 0$, ce point appartient au plan (P).
Un vecteur normal au plan (P) est le vecteur $\overrightarrow{n}(1, -2, 3)$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}(1, -1, -1)$ et $\overrightarrow{v}(2, 1, 0)$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan de représentation b). Or,

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = 1 \times 1 + (-2) \times (-1) + 3 \times (-1) = 1 + 2 - 3 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v} = 1 \times 2 + (-2) \times 1 + 3 \times 0 = 2 - 2 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan de représentation b) qui a par ailleurs un point commun avec le plan (P). Le plan (P) est donc effectivement le plan de représentation b). La bonne réponse est la réponse b).

Explication 2. Soient $t \in \mathbb{R}$ puis $M(-2 + t, -t, -1 - t)$ un point quelconque de (D).

$$(-2 + t) - 2(-t) + 3(-1 - t) + 5 = t + 2t - 3t - 2 - 3 + 5 = 0.$$

Donc $M \in (P)$. Ainsi, tout point de (D) appartient à (P) ou encore la droite (D) est une droite du plan (P). La bonne réponse est la réponse c).

Explication 3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $(2, -4, 6)$. La droite (D) admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1, -1, -1)$. Ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{MN}$ et donc les droites (MN) et (D) ne sont pas parallèles. Ceci élimine les propositions b) et d).

D'autre part

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{MN} = 1 \times 2 + (-1) \times (-4) + (-1) \times 6 = 2 + 4 - 6 = 0.$$

Donc, les droites (D) et (MN) sont orthogonales. La bonne réponse est la réponse a).

Explication 4. Soit $Q(-2 + t + 2t', -t - 2t', -1 - t + 3t')$, t et t' réels, un point de (S).

$$Q \in (P) \Leftrightarrow (-2 + t + 2t') - 2(-t - 2t') + 3(-1 - t + 3t') + 5 = 0 \Leftrightarrow 15t' = 0 \Leftrightarrow t' = 0.$$

Les points communs aux plans (P) et (S) sont les points de coordonnées $(-2 + t, -t, -1 - t)$, $t \in \mathbb{R}$. $(P) \cap (S)$ est donc la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. On note que $(P) \cap (S)$ et (Δ) admettent un vecteur directeur commun à savoir le vecteur de coordonnées $(1, -1, -1)$. Donc $(P) \cap (S)$ est une droite parallèle à (Δ).
Enfin, le point de coordonnées $(0, -2, -3)$ est un point commun à $(P) \cap (S)$ (obtenu pour $t = 2$) et à (Δ) (obtenu pour $t = 0$). Donc $(P) \cap (S)$ est la droite (Δ). La bonne réponse est la réponse b).

EXERCICE 3

1) a) Soit n un entier naturel.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125j_n + 0,525a_n \\ 0,625j_n + 0,625a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = A \times U_n.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ U_{n+1} = A \times U_n.}$$

b)

$$\begin{cases} j_1 = 0,125j_0 + 0,525a_0 = 0,125 \times 200 + 0,525 \times 500 = 25 + 262,5 = 287,5 \\ a_1 = 0,625j_0 + 0,625a_0 = 0,625 \times 200 + 0,625 \times 500 = 125 + 312,5 = 437,5 \end{cases}.$$

Il y a donc 287 animaux jeunes et 437 animaux adultes après un an d'observation.

$$\begin{cases} j_2 = 0,125j_1 + 0,525a_1 = 0,125 \times 287,5 + 0,525 \times 437,5 = 35,9375 + 229,6875 = 265,625 \\ a_2 = 0,625j_1 + 0,625a_1 = 0,625 \times 287,5 + 0,625 \times 437,5 = 179,6875 + 273,4375 = 453,125 \end{cases}.$$

Il y a donc 265 animaux jeunes et 453 animaux adultes après deux ans d'observation.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, exprimer $U_n = A^n \times U_0$.

- Pour $n = 1$, $U_1 = A \times U_0 = A^1 \times U_0$ d'après la question 1)a). La formule proposée est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $U_n = A^n \times U_0$ et montrons que $U_{n+1} = A^{n+1} \times U_0$.

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= A \times U_n \text{ (d'après la question 1)a))} \\ &= A \times A^n \times U_0 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= A^{n+1} \times U_0. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ U_n = A^n \times U_0.}$$

2) a)

$$\begin{aligned} Q \times D \times Q^{-1} &= \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \times (-0,25) & 3 \times 1 \\ -5 \times (-0,25) & 5 \times 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,75 & 3 \\ 1,25 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1,75 \times 0,1 + 3 \times 0,1 & (-1,75) \times (-0,06) + 3 \times 0,14 \\ 1,25 \times 0,1 + 5 \times 0,1 & 1,25 \times (-0,06) + 5 \times 0,14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \\ &= A. \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{Q \times D \times Q^{-1} = A.}$$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

- Pour $n = 1$, $Q \times D^1 \times Q^{-1} = Q \times D \times Q^{-1} = A$ d'après la question 2)a). La formule proposée est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = Q \times D^{n+1} \times Q^{-1}$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= Q \times D \times Q^{-1} \times Q \times D^n \times Q^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= Q \times D \times I \times D^n \times Q^{-1} = Q \times D \times D^n \times Q^{-1} \\ &= Q \times D^{n+1} \times Q^{-1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}.}$$

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $D^n = \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Pour $n = 1$, $D^1 = D = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-0,25)^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La formule proposée est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $D^n = \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et montrons que $D^{n+1} = \begin{pmatrix} (-0,25)^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} D^{n+1} &= D \times D^n \\ &= \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \begin{pmatrix} (-0,25)^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ D^n = \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3) a) Soit n un entier naturel non nul. D'après la question 1)b),

$$\begin{aligned} U_n = A^n \times U_0 &= \begin{pmatrix} 0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n & 0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n & 0,7 + 0,3 \times (-0,25)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 200\left(0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n\right) + 500\left(0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n\right) \\ 200\left(0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n\right) + 500\left(0,7 + 0,3 \times (-0,25)^n\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 270 - 70 \times (-0,25)^n \\ 450 + 50 \times (-0,25)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ j_n = 270 - 70 \times (-0,25)^n \text{ et } a_n = 450 + 50 \times (-0,25)^n.}$$

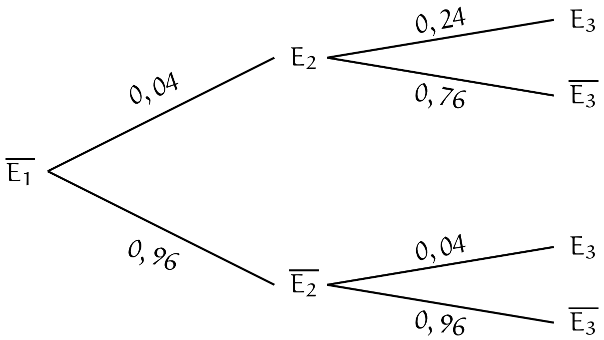
Puisque $-1 < -0,25 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,25)^n = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} j_n = 270 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} a_n = 450.}$$

b) Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années d'observation, le nombre d'animaux jeunes est environ 270 et le nombre d'animaux adultes est environ 450. Le nombre total d'animaux est quant à lui passé de 700 à environ 720.

EXERCICE 4

1) a) Représentons la situation par un arbre (E_1 est impossible et donc $\overline{E_1}$ est certain).



La probabilité demandée est $p_3 = p(E_3)$. La formule des probabilités totales fournit

$$\begin{aligned} p_3 &= p\left(E_2 \cap E_3\right) + p\left(\overline{E_2} \cap E_3\right) = p\left(E_2\right) \times p_{E_2}(E_3) + p\left(\overline{E_2}\right) \times p_{\overline{E_2}}(E_3) \\ &= 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = 0,0096 + 0,0384 = 0,048. \end{aligned}$$

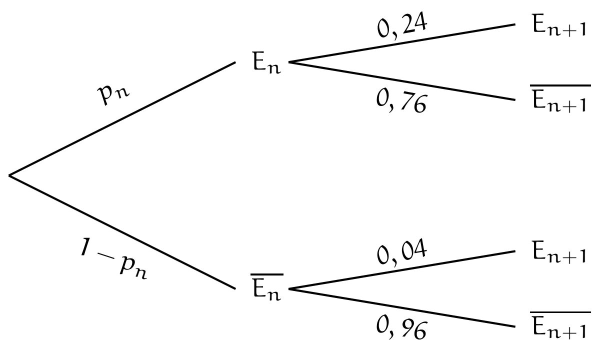
$$\boxed{p_3 = 0,048.}$$

b) La probabilité demandée est $p_{E_3}\left(E_2\right)$.

$$p_{E_3}\left(E_2\right) = \frac{p\left(E_2 \cap E_3\right)}{p\left(E_3\right)} = \frac{p\left(E_2\right) \times p_{E_2}\left(E_3\right)}{p\left(E_3\right)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \frac{0,0096}{0,048} = \frac{96}{480} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

$$\boxed{p_{E_3}\left(E_2\right) = 0,2.}$$

2) a)



b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. D'après la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p\left(E_n\right) \times p_{E_n}\left(E_{n+1}\right) + p\left(\overline{E_n}\right) \times p_{\overline{E_n}}\left(E_{n+1}\right) = 0,24p_n + 0,04(1 - p_n) \\ &= 0,2p_n + 0,04. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ supérieur ou égal à } 1,\ p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04.}$$

c) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$$u_{n+1} = p_{n+1} — 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = 0,2u_n.$$

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $r = 0,2$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,05 = -0,05$.

On sait alors que pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1},$$

et donc

$$p_n = u_n + 0,05 = 0,05 - 0,05 \times 0,2^{n-1}.$$

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ supérieur ou égal à 1, } p_n = 0,05 - 0,05 \times 0,2^{n-1}.}$$

d) Puisque $-1 < 0,2 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,2^{n-1} = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = 0,05.}$$

e) A l'étape 1, P contient p_1 et plus généralement, à l'étape $j \geqslant 1$, P contient p_j. L'algorithme s'arrête dès que la variable J contient un numéro j tel que $p_j \geqslant 0,05 - 10^{-k}$ (où k est la valeur entrée dans la variable K). A partir de ce numéro, tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à $0,05 - 10^{-k}$.

L'algorithme affiche donc le plus petit numéro j tel que $p_j \geqslant 0,05 - 10^{-k}$.

Puisque la suite (p_n) converge vers $0,05$, pour tout entier naturel K, il existe un rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $p_n \geqslant 0,05 - 10^{-K}$. On en déduit que cet algorithme s'arrête.

3) a) X suit une loi binomiale. En effet,

- 220 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « le salarié est malade » avec une probabilité $p = 0,05$ et « le salarié n'est pas malade » avec une probabilité $p = 1 - 0,05 = 0,95$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 220$ et $p = 0,05$.

On sait que $\mu = np = 220 \times 0,05 = 11$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10,45} = 3,23$ à 10^{-2} près.

b) La probabilité demandée est $p(7 \leqslant X \leqslant 15)$. Or,

$$7 \leqslant X \leqslant 15 \Leftrightarrow \frac{7-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{15-\mu}{\sigma}.$$

La probabilité demandée est donc aussi $p\left(\frac{7-11}{\sqrt{10,45}} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{15-11}{\sqrt{10,45}}\right)$ ou encore $p\left(-1,24 \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant 1,24\right)$ en arrondissant les bornes de l'encadrement à 10^{-2}.

L'énoncé nous dit que cette probabilité est environ :

$$\begin{aligned} p(-1,24 \leqslant Z \leqslant 1,24) &= p(Z \leqslant 1,24) - p(Z \leqslant -1,24) = p(Z < 1,24) - p(Z < -1,24) \\ &= 0,892 - 0,108 = 0,784. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La probabilité demandée vaut environ } 0,784.}$$

