Polynésie 2013. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) Étude de la fonction f.

a) $f(0) = (0+2)e^0 = 2$. Donc la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe (Oy) en le point de coordonnées $(0,2)$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x+2)e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow x+2 = 0 \text{ (car } e^{-x} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x = -2. \end{aligned}$$

La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe (Oy) en le point de coordonnées $(-2,0)$.

b) Limite de f en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

Limite de f en $+\infty$. Pour tout réel x, $f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x}$.
On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. D'autre part, en posant $X = -x$, d'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{X\to-\infty} -Xe^X = 0.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 + 2\times 0 = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

Par suite, l'axe (Ox) est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1\times e^{-x} + (x+2)\times(-1)e^{-x} = (1-x-2)e^{-x} = (-x-1)e^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc pour tout réel x, le signe de $f'(x)$ est le signe de $-x-1$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	e	↘	0

2) Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.

a) L'algorithme calcule

$$\frac{1}{4}f(0) + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{4}\right) = 0,25\left(2 + 2,25e^{-0,25} + 2,5e^{-0,5} + 2,75e^{-0,75}\right).$$

La calculatrice fournit $1,642$ arrondi à 10^{-3}.

b) Algorithme modifié.

Variables :	k est un nombre entier S est un nombre réel N est un nombre entier non nul
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0 Demander N
Traitement :	Pour k variant de 0 à N − 1 Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{N}f\left(\frac{k}{N}\right)$ Fin Pour
Sortie :	Afficher S

3) Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

a) La fonction f est continue et positive sur $[0, 1]$. Donc

$$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[(-x-3)e^{-x}\right]_0^1 = (-1-3)e^{-1} - (0-3)e^0 = 3 - \frac{4}{e}.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 3 - \frac{4}{e}.}$$

b) Notons $\mathscr{A}_{\text{app}}$ la valeur approchée obtenue en a). La calculatrice fournit

$$|\mathscr{A} - \mathscr{A}_{\text{app}}| = \left|3 - \frac{4}{e} - 1,642\right| = 0,114 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

EXERCICE 2

1) réponse d)

2) réponse c)

3) réponse a)

4) réponse b)

Explication 1.

$$i\frac{z_1}{z_2} = i\frac{\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{12}\right)} = \sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}.$$

La bonne réponse est la réponse d).

Explication 2. Soit z un nombre complexe. On sait que $-z = \overline{z}$ si et seulement si z est imaginaire pur. L'ensemble des points du plan dont l'affixe est un nombre imaginaire pur est la droite (Oy). La bonne réponse est la réponse c).

Explication 3. Notons Δ la droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C. Δ est la droite de vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(-2, 3, 1)$ et passant par le point C de coordonnées $(-1, 0, 4)$.

Une représentation paramétrique de Δ est $\left\{\begin{array}{l} x = -2t - 1 \\ y = 3t \\ z = t + 4 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. La bonne réponse est la réponse a).

Explication 4. Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est

$$3(x + 1) - 5(y - 2) + (z - 3) = 0,$$

ou encore $3x - 5y + z + 10 = 0$. Soit $M(t - 7, t + 3, 2t + 5)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

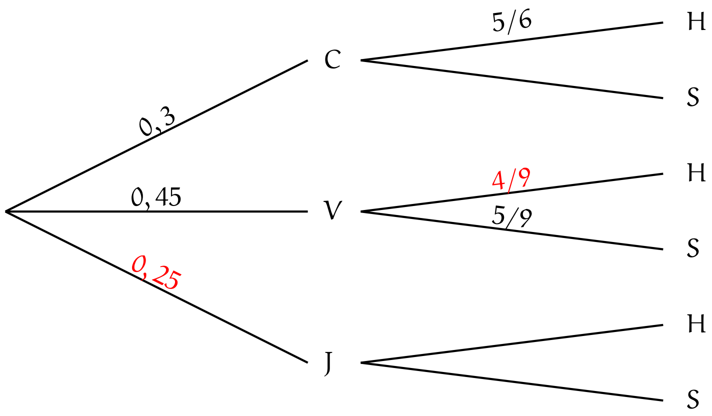
$$3((t - 7) + 1) - 5((t + 3) - 2) + ((2t + 5) - 3) + 10 = (3 - 5 + 2)t + (-18 - 5 + 2 + 10) = -11 \neq 0.$$

Ainsi, aucun point de la droite Δ n'appartient au plan $\mathscr{P}$. La bonne réponse est la réponse b).

EXERCICE 3

Partie 1

1) Représentons la situation par un arbre.



La probabilité demandée est $p(C \cap H)$. L'énoncé donne $p_C(H) = \dfrac{5}{6}$ et $p(C) = \dfrac{3}{10}$. Donc,

$$p(C \cap H) = p(C) \times p_C(H) = \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{2 \times 5 \times 2 \times 3} = \frac{1}{4}.$$

$$\boxed{p(C \cap H) = \frac{1}{4} = 0,25.}$$

2) a) $p(H) = \dfrac{13}{20} = 0,65$ et $p_C(H) = \dfrac{5}{6} = 0,8\ldots$. Ainsi, $p_C(H) \neq p(H)$ et donc

$$\boxed{\text{les événements } C \text{ et } H \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

b) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(H) = p(C \cap H) + p(V \cap H) + p(J \cap H).$$

On sait déjà que $p(H) = \dfrac{13}{20}$ et que $p(C \cap H) = \dfrac{1}{4}$. Ensuite,

$$p(V \cap H) = p(V) \times p_V(H) = \frac{45}{100} \times \left(1 - \frac{5}{9}\right) = \frac{45}{100} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{5}.$$

On en déduit que

$$p(J \cap H) = p(H) - p(C \cap H) - p(V \cap H) = \frac{13}{20} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{13 - 5 - 4}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

$$\boxed{p(J \cap H) = \frac{1}{5} = 0,2.}$$

Enfin,

$$P_J(H) = \frac{p(J \cap H)}{p(J)} = \frac{1/5}{1/4} = \frac{4}{5}.$$

$$\boxed{P_J(H) = \frac{4}{5} = 0,8.}$$

Partie 2

1) Ici, $n = 60$ et $p = 0,3$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 18$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) = 42$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$.
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de morceaux de musique classique est

$$\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,3-1,96\frac{\sqrt{0,3\times 0,7}}{\sqrt{60}}, 0,3+1,96\frac{\sqrt{0,3\times 0,7}}{\sqrt{60}}\right].$$

En arrondissant au millième de manière à élargir un peu l'intervalle, on obtient l'intervalle $[0,184;0,416]$.

2) La fréquence observée de morceaux de musique classique est $\frac{12}{60}=0,2$. Cette fréquence appartient à l'intervalle précédent. Donc, on peut accepter l'hypothèse que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas n'est pas défectueuse mais on ne connaît pas le risque de se tromper.

Partie 3

1) $P(180\leqslant X\leqslant 220)=P(X\leqslant 220)-P(X\leqslant 180)=0,841-0,159=0,682$.

$$\boxed{P(180\leqslant X\leqslant 220)=0,682\text{ arrondi à }10^{-3}.}$$

2) La probabilité demandée est $p(X\geqslant 240)$. Or,

$$p(X\geqslant 240)=1-p(X\leqslant 240)=1-0,977=0,023$$

$$\boxed{P(X\geqslant 240)=0,023\text{ arrondi à }10^{-3}.}$$

EXERCICE 4

1) a) $u_1 = \dfrac{3u_0}{1+2u_0} = \dfrac{\frac{3}{2}}{1+1} = \dfrac{3}{4}$ et $u_2 = \dfrac{3u_1}{1+2u_1} = \dfrac{3\times\frac{3}{4}}{1+2\times\frac{3}{4}} = \dfrac{9}{10}$.

$$\boxed{u_1 = \frac{3}{4} \text{ et } u_2 = \frac{9}{10}.}$$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

- $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et donc l'inégalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.

Comme $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$ et que $u_n > 0$, on a $u_{n+1} > 0$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n > 0.}$$

2) a) Soit n un entier naturel.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{1+2u_n}.$$

Comme $u_n < 1$, on a $1+2u_n < 3$ puis $\dfrac{1}{1+2u_n} > \dfrac{1}{3}$ par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ et donc $\dfrac{3}{1+2u_n} > 1$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Puisque pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$, on en déduit que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$. On a montré que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

b) La suite (u_n) est croissante et est majorée par 1. Donc la suite (u_n) converge.

3) Puisque pour tout entier naturel n, on a $u_n \neq 1$, pour tout entier naturel n, v_n existe.

a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}} \\ &= \frac{3u_n}{(1+2u_n)-3u_n} \text{ (en multipliant numérateur et dénominateur par le réel non nul } 1+2u_n) \\ &= 3\times\frac{u_n}{1-u_n} = 3v_n. \end{aligned}$$

On a montré que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 3v_n$ et donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$.

b) $v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

Soit n un entier naturel. On sait que

$$v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 3^n = 3^n.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_n = 3^n.}$$

c) Soit n un entier naturel.

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \Leftrightarrow (1-u_n)v_n = u_n \Leftrightarrow v_n - u_n v_n = u_n \Leftrightarrow v_n = u_n v_n + u_n \Leftrightarrow u_n(1+v_n) = v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{v_n+1} \Leftrightarrow u_n = \frac{3^n}{3^n+1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = \frac{3^n}{3^n+1}.}$$

d) Pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{3^n}{3^n+1} = \frac{3^n}{3^n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}.$$

Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1+0} = 1$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

