Polynésie 2013. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

1) Étude de la fonction f.

a) $f(0) = (0+2)e^0 = 2$. Donc la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe (Oy) en le point de coordonnées $(0, 2)$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x+2)e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 2 = 0 \text{ (car } e^{-x} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x = -2. \end{aligned}$$

La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe (Oy) en le point de coordonnées $(-2, 0)$.

b) Limite de f en $-\infty$. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.}$$

Limite de f en $+\infty$. Pour tout réel x, $f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x}$.
On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$. D'autre part, en posant $X = -x$, d'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim_{X \to -\infty} -Xe^X = 0.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 + 2 \times 0 = 0$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

Par suite, l'axe (Ox) est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-1)e^{-x} = (1 - x - 2)e^{-x} = (-x-1)e^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc pour tout réel x, le signe de $f'(x)$ est le signe de $-x-1$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

2) Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.

a) L'algorithme calcule

$$\frac{1}{4}f(0) + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{4}\right) = 0,25\left(2 + 2,25e^{-0,25} + 2,5e^{-0,5} + 2,75e^{-0,75}\right).$$

La calculatrice fournit $1,642$ arrondi à 10^{-3}.

b) Algorithme modifié.

Variables :	k est un nombre entier S est un nombre réel N est un nombre entier non nul
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0 Demander N
Traitement :	Pour k variant de 0 à $N-1$ Affecter à S la valeur $S + \dfrac{1}{N}f\left(\dfrac{k}{N}\right)$ Fin Pour
Sortie :	Afficher S

3) Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

a) La fonction f est continue et positive sur $[0, 1]$. Donc

$$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\ dx = \left[(-x-3)e^{-x}\right]_0^1 = (-1-3)e^{-1} - (0-3)e^0 = 3 - \frac{4}{e}.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 3 - \frac{4}{e}.}$$

b) Notons $\mathscr{A}_{\text{app}}$ la valeur approchée obtenue en a). La calculatrice fournit

$$|\mathscr{A} - \mathscr{A}_{\text{app}}| = \left|3 - \frac{4}{e} - 1,642\right| = 0,114 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

EXERCICE 2

1) réponse d)

2) réponse c)

3) réponse a)

4) réponse b)

Explication 1.

$$i\frac{z_1}{z_2} = i\frac{\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{12}\right)} = \sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}.$$

La bonne réponse est la réponse d).

Explication 2. Soit z un nombre complexe. On sait que $-z = \overline{z}$ si et seulement si z est imaginaire pur. L'ensemble des points du plan dont l'affixe est un nombre imaginaire pur est la droite (Oy). La bonne réponse est la réponse c).

Explication 3. Notons Δ la droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C. Δ est la droite de vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(-2, 3, 1)$ et passant par le point C de coordonnées $(-1, 0, 4)$.

Une représentation paramétrique de Δ est $\left\{\begin{array}{l} x = -2t - 1 \\ y = 3t \\ z = t + 4 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. La bonne réponse est la réponse a).

Explication 4. Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est

$$3(x+1) - 5(y-2) + (z-3) = 0,$$

ou encore $3x - 5y + z + 10 = 0$. Soit $M(t-7, t+3, 2t+5)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

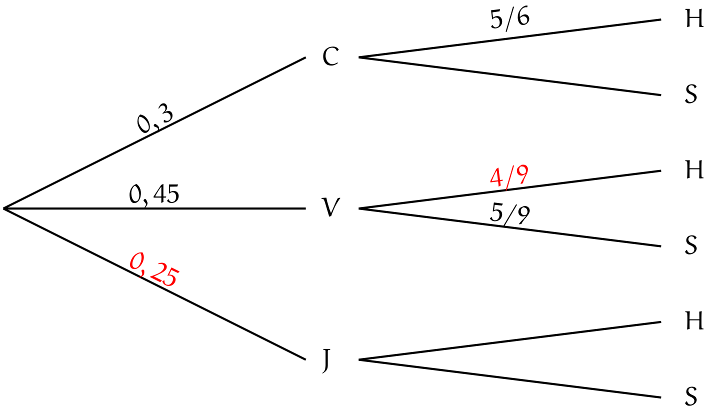
$$3((t-7)+1) - 5((t+3)-2) + ((2t+5)-3) + 10 = (3-5+2)t + (-18-5+2+10) = -11 \neq 0.$$

Ainsi, aucun point de la droite Δ n'appartient au plan $\mathscr{P}$. La bonne réponse est la réponse b).

EXERCICE 3

Partie 1

1) Représentons la situation par un arbre.



La probabilité demandée est $p(C\cap H)$. L'énoncé donne $p_C(H)=\dfrac{5}{6}$ et $p(C)=\dfrac{3}{10}$. Donc,

$$p(C\cap H)=p(C)\times p_C(H)=\frac{3}{10}\times\frac{5}{6}=\frac{3\times 5}{2\times 5\times 2\times 3}=\frac{1}{4}.$$

$$\boxed{p(C\cap H)=\frac{1}{4}=0,25.}$$

2) a) $p(H)=\dfrac{13}{20}=0,65$ et $p_C(H)=\dfrac{5}{6}=0,8\ldots$. Ainsi, $p_C(H)\neq p(H)$ et donc

$$\boxed{\text{les événements } C \text{ et } H \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

b) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(H)=p(C\cap H)+p(V\cap H)+p(J\cap H).$$

On sait déjà que $p(H)=\dfrac{13}{20}$ et que $p(C\cap H)=\dfrac{1}{4}$. Ensuite,

$$p(V\cap H)=p(V)\times p_V(H)=\frac{45}{100}\times\left(1-\frac{5}{9}\right)=\frac{45}{100}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{5}.$$

On en déduit que

$$p(J\cap H)=p(H)-p(C\cap H)-p(V\cap H)=\frac{13}{20}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{13-5-4}{20}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}.$$

$$\boxed{p(J\cap H)=\frac{1}{5}=0,2.}$$

Enfin,

$$P_J(H)=\frac{p(J\cap H)}{p(J)}=\frac{1/5}{1/4}=\frac{4}{5}.$$

$$\boxed{P_J(H)=\frac{4}{5}=0,8.}$$

Partie 2

1) Ici, $n=60$ et $p=0,3$. On note que $n\geqslant 30$, $np=18$ et donc $np\geqslant 5$ et $n(1-p)=42$ et donc $n(1-p)\geqslant 5$. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de morceaux de musique classique est

$$\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,3-1,96\frac{\sqrt{0,3\times 0,7}}{\sqrt{60}}, 0,3+1,96\frac{\sqrt{0,3\times 0,7}}{\sqrt{60}}\right].$$

En arrondissant au millième de manière à élargir un peu l'intervalle, on obtient l'intervalle $[0,184;0,416]$.

2) La fréquence observée de morceaux de musique classique est $\frac{12}{60}=0,2$. Cette fréquence appartient à l'intervalle précédent. Donc, on peut accepter l'hypothèse que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas n'est pas défectueuse mais on ne connaît pas le risque de se tromper.

Partie 3

1) $P(180 \leqslant X \leqslant 220) = P(X \leqslant 220) - P(X \leqslant 180) = 0,841 - 0,159 = 0,682$.

$$\boxed{P(180 \leqslant X \leqslant 220) = 0,682 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

2) La probabilité demandée est $p(X \geqslant 240)$. Or,

$$p(X \geqslant 240) = 1 - p(X \leqslant 240) = 1 - 0,977 = 0,023$$

$$\boxed{P(X \geqslant 240) = 0,023 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

EXERCICE 4

1) a)

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0,7a_0 + 0,2b_0 + 60 \\ 0,1a_0 + 0,6b_0 + 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 \times 300 + 0,2 \times 300 + 60 \\ 0,1 \times 300 + 0,6 \times 300 + 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 \\ 280 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{U_1 = \begin{pmatrix} 330 \\ 280 \end{pmatrix}.}$$

b) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \begin{pmatrix} 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7a_n + 0,2b_n \\ 0,1a_n + 0,6b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = M \times U_n + P. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ U_{n+1} = M \times U_n + P.}$$

2) a) $I - M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} (I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \times 4 - 0,2 \times 1 & 0,3 \times 2 - 0,2 \times 3 \\ -0,1 \times 4 + 0,4 \times 1 & -0,1 \times 2 + 0,4 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \end{aligned}$$

b) Ainsi, $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On sait alors que

$$\boxed{\text{la matrice } I - M \text{ est inversible et } (I - M)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.}$$

c) Soit U une matrice colonne de format 2.

$$\begin{aligned} U = M \times U + P &\Leftrightarrow U - MU = P \Leftrightarrow (I - M)U = P \Leftrightarrow U = (I - M)^{-1}P \\ &\Leftrightarrow U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} \Leftrightarrow U = \begin{pmatrix} 4 \times 60 + 2 \times 70 \\ 1 \times 60 + 3 \times 70 \end{pmatrix} \Leftrightarrow U = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3) a) Soit n un entier naturel n.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - U = (MU_n + P) - (MU + P) = MU_n - MU = M(U_n - U) = M \times V_n.$$

b) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $V_n = M^n \times V_0$.

- $M^0 \times V_0 = I \times V_0 = V_0$. Donc l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $V_n = M^n \times V_0$ et montrons que $V_{n+1} = M^{n+1} \times V_0$.

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= M \times V_n \\ &= M \times (M^n \times V_0) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= (M \times M^n) \times V_0 = M^{n+1} \times V_0. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ V_n = M^n \times V_0.}$$

4) a) Pour tout entier naturel n,

$$U_n = U + V_n = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ -\dfrac{50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 - \dfrac{100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ 270 - \dfrac{50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour tout entier naturel n, $a_n = 380 - \frac{100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n$.
Puisque $-1 < 0,8 < 1$ et $-1 < 0,5 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 380.}$$

b) A long terme, le nombre d'abonnés de l'opérateur A se stabilisera autour de $380\,000$ abonnés.

