Nouvelle Calédonie. Novembre 2013. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1. Étude d'une fonction auxiliaire

a) La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x

$$g(x) = 2xe^x + x^2e^x + 0 = x(x+2)e^x.$$

La fonction g' est strictement positive sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0. Donc, la fonction g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

La fonction g est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de $\left[g(0), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[= [-1, +\infty[$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. En particulier, puisque $0 \in [-1, +\infty[$, il existe un réel positif a et un seul tel que $g(a) = 0$.

La calculatrice fournit $g(0,703) = -0,001\ldots < 0$ et $g(0,704) = 0,002\ldots > 0$. Donc $g(0,703) < g(a) < g(0,704)$. Puisque la fonction g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que

$$\boxed{0,703 < a < 0,704.}$$

c) Soit x un réel positif. Puisque la fonction g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, si $x < a$, alors $g(x) < g(a)$ ou encore $g(x) < 0$ et si $x > a$, alors $g(x) > g(a)$ ou encore $g(x) > 0$.

Ainsi, la fonction g est strictement négative sur $[0, a[$, strictement positive sur $]a, +\infty[$ et s'annule en a.

2. Étude de la fonction f

a) Limite en 0. $\lim\limits_{x\to0,\ x>0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0,\ x>0} e^x = 1$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to0,\ x>0} f(x) = +\infty.}$$

Limite en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

b) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel strictement positif x,

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2e^x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

c) Le signe de la fonction g a été étudié en 1). On en déduit le tableau de variation de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

x	0		a		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

d) Puisque $g(a) = 0$, on a $a^2e^a - 1 = 0$ puis $a^2e^a = 1$ et enfin, puisque $a \neq 0$, $e^a = \dfrac{1}{a^2}$.

La fonction f admet un minimum en a. Ce minimum est

$$m = f(a) = e^a + \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}.$$

e) On a $0,703 < a < 0,704$. Par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$, on en déduit que

$$0,703^2 < a^2 < 0,704.$$

Par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, on a

$$\frac{1}{0,704^2} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{0,703^2} \text{ et } \frac{1}{0,704} < \frac{1}{a} < \frac{1}{0,703}.$$

En additionnant membre à membre, on obtient

$$\frac{1}{0,704^2} + \frac{1}{0,704} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} < \frac{1}{0,703^2} + \frac{1}{0,703}$$

La calculatrice fournit $\frac{1}{0,704^2} + \frac{1}{0,704} = 3,438\ldots$ et en particulier, $\frac{1}{0,704^2} + \frac{1}{0,704} > 3,43$.
On a aussi $\frac{1}{0,703^2} + \frac{1}{0,703} = 3,445\ldots$ et en particulier $\frac{1}{0,703^2} + \frac{1}{0,703} < 3,45$. On a montré que

$$\boxed{3,43 < m < 3,45.}$$

EXERCICE 2

Partie A

Tableau complété.

K	W	U	V
0		2	10
1	2	14/3	8
2	14/3	52/9	43/6

Partie B

1) a) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{3(u_n + 3v_n) - 4(2u_n + v_n)}{12} = \frac{-5u_n + 5v_n}{12}$$
$$= \frac{5}{12}(v_n - u_n).$$

Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{5}{12}(v_n - u_n)$.

b) D'après la question précédente, la suite (w_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{5}{12}$. De plus, $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$. On sait alors que pour tout entier naturel n,

$$w_n = w_0 \times q^n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n.$$

Pour tout entier naturel n, $w_n = 8 \times \left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

2) a) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{w_n}{3}.$$

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant 0$ et donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ou encore, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$. Ceci montre que la suite (u_n) est croissante.

Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{v_n - u_n}{4} = -\frac{w_n}{4}.$$

Pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant 0$ et donc pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ ou encore, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$. Ceci montre que la suite (v_n) est décroissante.

La suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.

b) Puisque la suite (u_n) est croissante, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant u_0$ ou encore pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$.
Puisque la suite (v_n) est décroissante, pour tout entier naturel n, on a $v_n \leqslant v_0$ ou encore pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 10$.
Puisque pour tout entier naturel n, on a $w_n \geqslant 0$, pour tout entier naturel n, on a $v_n \geqslant u_n$.

Par suite, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n \leqslant 10$ et en particulier $u_n \leqslant 10$. De même, pour tout entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et en particulier $v_n \geqslant 2$.

Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 10. Donc la suite (u_n) est convergente. De même, la suite (v_n) est décroissante et minorée par 2. Donc la suite (v_n) est convergente.

3) Posons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$. On fait tendre n vers $+\infty$ dans les deux membres de cette égalité et on obtient $\ell = \dfrac{2\ell + \ell'}{3}$ ou encore $3\ell = 2\ell + \ell'$ et donc $\ell = \ell'$.

On a montré que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \frac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \frac{u_n + 3v_n}{4} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n \\ &= 3u_n + 4v_n = t_n. \end{aligned}$$

Donc, la suite (t_n) est constante. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$t_n = t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 46.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $3u_n + 4v_n = 46$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $3\ell + 4\ell = 46$ ou encore $\ell = \dfrac{46}{7}$.
On a montré que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{46}{7}.}$$

EXERCICE 3

Partie A

1) La probabilité que la bille choisie soit aux normes est

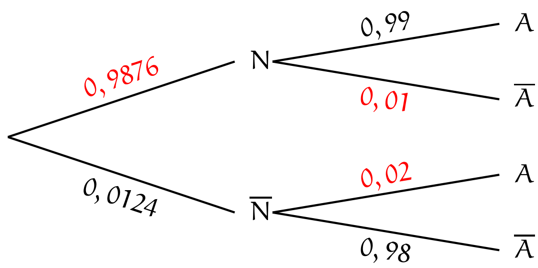
$$P(9 \leqslant X \leqslant 11) = P(X \leqslant 11) - P(X \leqslant 9) = 0,99379034 - 0,00620967 = 0,98758067.$$

La probabilité que la bille choisie soit hors norme est

$$1 - P(9 \leqslant X \leqslant 11) = 1 - 0,98758067 = 0,01241933.$$

En arrondissant à 10^{-4}, on obtient $0,0124$.

2) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(N \cap A) + P\left(\overline{N} \cap A\right) = P(N) \times P_N(A) + P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A) \\ &= (1 - 0,0124) \times 0,99 + 0,0124 \times (1 - 0,98) = 0,9780 \text{ arrondi à } 10^{-4}. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A) = 0,9780 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

c) La probabilité demandée est $P_A\left(\overline{N}\right)$.

$$P_A\left(\overline{N}\right) = \frac{P\left(\overline{N} \cap A\right)}{P(A)} = \frac{P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A)}{P(A)} = \frac{0,0124 \times 0,02}{0,9780} = 0,000253\ldots.$$

$$\boxed{P_A\left(\overline{N}\right) = 0,0003 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

Partie B

1) Y suit une loi binomiale. En effet,

- 100 expériences identiques et indépendantes sont effectuées (choisir une bille 100 fois) ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « la bille est hors norme » avec une probabilité $p = 0,0124$ et « la bille choisie est aux normes » avec une probabilité $1 - p = 0,9876$.

Donc, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0124$.

2) On sait que l'espérance de Y est $E(Y) = np = 100 \times 0,0124 = 1,24$ et l'écart-type de Y est $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0,0124 \times 0,9876} = 1,1066$ arrondi à 10^{-4}.

$$\boxed{E(Y) = 1,24 \text{ et } \sigma(Y) = 1,1066 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

3) La probabilité demandée est $P(Y = 2)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{P(Y = 2) = 0,2241 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

4) La probabilité demandée est $P(Y \leqslant 1)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{P(Y \leqslant 1) = 0,6477 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

EXERCICE 4

Proposition 1.	**VRAI**
Proposition 2.	**FAUX**
Proposition 3.	**VRAI**
Proposition 4.	**VRAI**
Proposition 5.	**VRAI**

1) $(1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i$ puis $(1+i)^4 = \left((1+i)^2\right)^2 = (2i)^2 = -4$. Soit alors n un entier naturel.

$$(1+i)^{4n} = \left((1+i)^4\right)^n = (-4)^n.$$

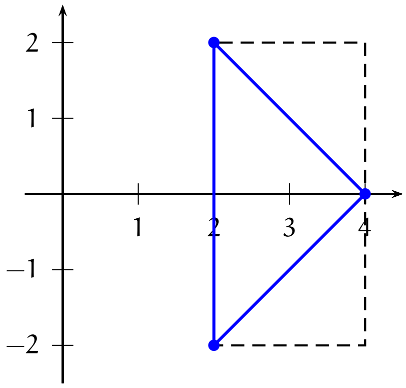
La proposition 1 est vraie.

2) Soit z un nombre complexe.

$$(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0 \Leftrightarrow z = 4 \text{ ou } z^2-4z+8 = 0.$$

Le discriminant de l'équation $z^2-4z+8=0$ est $\Delta = (-4)^2 - 4\times 1\times 8 = -16 < 0$. L'équation $z^2-4z+8=0$ admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{-(-4)+4i}{2} = 2+2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2-2i$.

Les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ sont 4, $2+2i$ et $2-2i$.



L'aire du triangle dont les sommets ont pour affixes les solutions de (E) est la moitié de l'aire du rectangle de sommets les points de coordonnées $(2,2)$, $(4,2)$, $(4,-2)$ et $(2,-2)$. Cette aire est égale à $\dfrac{4\times 2}{2} = 4$. La proposition 2 est fausse.

3) Soit α un nombre réel.

$$1+e^{2i\alpha} = e^{i\alpha}\left(e^{-i\alpha}+e^{i\alpha}\right) = e^{i\alpha}(\cos\alpha - i\sin\alpha + \cos\alpha + i\sin\alpha) = 2e^{i\alpha}\cos(\alpha).$$

La proposition 3 est vraie.

4) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ puis

$$\frac{1}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

En particulier, $\arg(z_A) = \dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ puis $\arg(z_{M_n}) = \arg\left((z_A)^n\right) = \dfrac{n\pi}{4}$ $[2\pi]$. On en déduit que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ et que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_n}\right) = \dfrac{n\pi}{4}$ $[2\pi]$ puis que

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_n}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_n}\right) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_n}\right) = -\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{4} = \frac{(n-1)\pi}{4}\ [2\pi].$$

Supposons de plus que $n-1$ soit divisible par 4. Posons $n = 4p$ où p est un entier naturel.

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_n}\right) = \frac{4p\pi}{4} = p\pi\ [2\pi].$$

Mais alors les points O, A et M_n sont alignés. La proposition 4 est vraie.

5) $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ puis

$$1 + j + j^2 = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

La proposition 5 est vraie.

