# Nouvelle Calédonie. Novembre 2013. Enseignement de spécialité. Corrigé

**EXERCICE 1**

### 1. Étude d'une fonction auxiliaire

**a)** La fonction $g$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif $x$

$$g(x) = 2xe^x + x^2e^x + 0 = x(x+2)e^x.$$

La fonction $g'$ est strictement positive sur $]0, +\infty[$ et s'annule en $0$. Donc, la fonction $g$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

**b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

La fonction $g$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel $k$ de $\left[g(0), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[ = [-1, +\infty[$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. En particulier, puisque $0 \in [-1, +\infty[$, il existe un réel positif $a$ et un seul tel que $g(a) = 0$.

La calculatrice fournit $g(0,703) = -0,001\ldots < 0$ et $g(0,704) = 0,002\ldots > 0$. Donc $g(0,703) < g(a) < g(0,704)$. Puisque la fonction $g$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que

$$\boxed{0,703 < a < 0,704.}$$

**c)** Soit $x$ un réel positif. Puisque la fonction $g$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, si $x < a$, alors $g(x) < g(a)$ ou encore $g(x) < 0$ et si $x > a$, alors $g(x) > g(a)$ ou encore $g(x) > 0$.

Ainsi, la fonction $g$ est strictement négative sur $[0, a[$, strictement positive sur $]a, +\infty[$ et s'annule en $a$.

### 2. Étude de la fonction $f$

**a) Limite en $0$.** $\lim\limits_{x\to0,\ x>0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0,\ x>0} e^x = 1$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to0,\ x>0} f(x) = +\infty.}$$

**Limite en $+\infty$.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

**b)** La fonction $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel strictement positif $x$,

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2e^x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

**c)** Le signe de la fonction $g$ a été étudié en 1). On en déduit le tableau de variation de la fonction $f$ sur $]0, +\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(a)$ | ↗ | $+\infty$ |

**d)** Puisque $g(a) = 0$, on a $a^2e^a - 1 = 0$ puis $a^2e^a = 1$ et enfin, puisque $a \neq 0$, $e^a = \dfrac{1}{a^2}$.

La fonction $f$ admet un minimum en $a$. Ce minimum est

$$m = f(a) = e^a + \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}.$$

**e)** On a $0,703 < a < 0,704$. Par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$, on en déduit que

$$0,703^2 < a^2 < 0,704.$$

Par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, on a

$$\frac{1}{0,704^2} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{0,703^2} \text{ et } \frac{1}{0,704} < \frac{1}{a} < \frac{1}{0,703}.$$

En additionnant membre à membre, on obtient

$$\frac{1}{0,704^2} + \frac{1}{0,704} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} < \frac{1}{0,703^2} + \frac{1}{0,703}$$

La calculatrice fournit $\frac{1}{0,704^2} + \frac{1}{0,704} = 3,438\dots$ et en particulier, $\frac{1}{0,704^2} + \frac{1}{0,704} > 3,43$.
On a aussi $\frac{1}{0,703^2} + \frac{1}{0,703} = 3,445\dots$ et en particulier $\frac{1}{0,703^2} + \frac{1}{0,703} < 3,45$. On a montré que

$$\boxed{3,43 < m < 3,45.}$$

**EXERCICE 2**

**Partie A**

**Tableau complété.**

| K | W | U | V |
|---|---|---|---|
| 0 | | 2 | 10 |
| 1 | 2 | 14/3 | 8 |
| 2 | 14/3 | 52/9 | 43/6 |

**Partie B**

**1) a)** Soit $n$ un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{3(u_n + 3v_n) - 4(2u_n + v_n)}{12} = \frac{-5u_n + 5v_n}{12} \\ &= \frac{5}{12}(v_n - u_n). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n).}$$

**b)** D'après la question précédente, la suite $(w_n)$ est géométrique de raison $q = \dfrac{5}{12}$. De plus, $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$. On sait alors que pour tout entier naturel $n$,

$$w_n = w_0 \times q^n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ w_n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n.}$$

**2) a)** Soit $n$ un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{w_n}{3}.$$

D'après la question précédente, pour tout entier naturel $n$, $w_n \geqslant 0$ et donc pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ou encore, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. Ceci montre que la suite $(u_n)$ est croissante.

Soit $n$ un entier naturel.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{v_n - u_n}{4} = -\frac{w_n}{4}.$$

Pour tout entier naturel $n$, $w_n \geqslant 0$ et donc pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ ou encore, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} \leqslant v_n$. Ceci montre que la suite $(v_n)$ est décroissante.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante et la suite } (v_n) \text{ est décroissante.}}$$

**b)** Puisque la suite $(u_n)$ est croissante, pour tout entier naturel $n$, on a $u_n \geqslant u_0$ ou encore pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant 2$.
Puisque la suite $(v_n)$ est décroissante, pour tout entier naturel $n$, on a $v_n \leqslant v_0$ ou encore pour tout entier naturel $n$, $v_n \leqslant 10$.
Puisque pour tout entier naturel $n$, on a $w_n \geqslant 0$, pour tout entier naturel $n$, on a $v_n \geqslant u_n$.

Par suite, pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant v_n \leqslant 10$ et en particulier $u_n \leqslant 10$. De même, pour tout entier naturel $n$, $2 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et en particulier $v_n \geqslant 2$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n \leqslant 10 \text{ et } v_n \geqslant 2.}$$

**c)** La suite $(u_n)$ est croissante et majorée par 10. Donc la suite $(u_n)$ est convergente. De même, la suite $(v_n)$ est décroissante et minorée par 2. Donc la suite $(v_n)$ est convergente.

**3)** Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$. On fait tendre $n$ vers $+\infty$ dans les deux membres de cette égalité et on obtient $\ell = \dfrac{2\ell + \ell'}{3}$ ou encore $3\ell = 2\ell + \ell'$ et donc $\ell = \ell'$.

On a montré que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ont la même limite.

**4)** Soit $n$ un entier naturel.

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \frac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \frac{u_n + 3v_n}{4} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n \\ &= 3u_n + 4v_n = t_n. \end{aligned}$$

Donc, la suite $(t_n)$ est constante. On en déduit que pour tout entier naturel $n$,

$$t_n = t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 46.$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $3u_n + 4v_n = 46$. Quand $n$ tend vers $+\infty$, on obtient $3\ell + 4\ell = 46$ ou encore $\ell = \dfrac{46}{7}$. On a montré que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{46}{7}.}$$

**EXERCICE 3**

**Partie A**

**1)** La probabilité que la bille choisie soit aux normes est

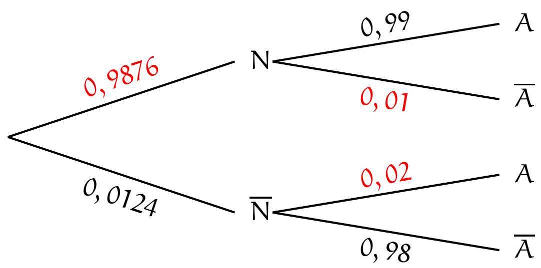
$$P(9 \leqslant X \leqslant 11) = P(X \leqslant 11) - P(X \leqslant 9) = 0,99379034 - 0,00620967 = 0,98758067.$$

La probabilité que la bille choisie soit hors norme est

$$1 - P(9 \leqslant X \leqslant 11) = 1 - 0,98758067 = 0,01241933.$$

En arrondissant à $10^{-4}$, on obtient $0,0124$.

**2) a)** Représentons la situation par un arbre de probabilités.




**b)** D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(N \cap A) + P\left(\overline{N} \cap A\right) = P(N) \times P_N(A) + P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A) \\ &= (1 - 0,0124) \times 0,99 + 0,0124 \times (1 - 0,98) = 0,9780 \text{ arrondi à } 10^{-4}. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A) = 0,9780 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

**c)** La probabilité demandée est $P_A\left(\overline{N}\right)$.

$$P_A\left(\overline{N}\right) = \frac{P\left(\overline{N} \cap A\right)}{P(A)} = \frac{P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A)}{P(A)} = \frac{0,0124 \times 0,02}{0,9780} = 0,000253\ldots.$$

$$\boxed{P_A\left(\overline{N}\right) = 0,0003 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

**Partie B**

**1)** Y suit une loi binomiale. En effet,

- 100 expériences identiques et indépendantes sont effectuées (choisir une bille 100 fois) ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « la bille est hors norme » avec une probabilité $p = 0,0124$ et « la bille choisie est aux normes » avec une probabilité $1 - p = 0,9876$.

Donc, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0124$.

**2)** On sait que l'espérance de Y est $E(Y) = np = 100 \times 0,0124 = 1,24$ et l'écart-type de Y est $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0,0124 \times 0,9876} = 1,1066$ arrondi à $10^{-4}$.

$$\boxed{E(Y) = 1,24 \text{ et } \sigma(Y) = 1,1066 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

**3)** La probabilité demandée est $P(Y = 2)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{P(Y = 2) = 0,2241 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

**4)** La probabilité demandée est $P(Y \leqslant 1)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{P(Y \leqslant 1) = 0,6477 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

**EXERCICE 4**

**1)** Soit $x$ un entier relatif de $E$.

$$\begin{aligned} g(x) = x \Rightarrow g(x) \equiv x\ [27] \Rightarrow 4x + 3 \equiv x\ [27] \Rightarrow 3x \equiv -3\ [27] \\ \Rightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } 3x = -3 + 27k \\ \Rightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } x = -1 + 9k. \end{aligned}$$

Soient alors $k \in \mathbb{Z}$ puis $x = -1 + 9k$.

$$\begin{aligned} x \in E \Leftrightarrow 0 \leqslant -1 + 9k \leqslant 26 \Leftrightarrow 1 \leqslant 9k \leqslant 27 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{9} \leqslant k \leqslant 3 \Leftrightarrow 1 \leqslant k \leqslant 3. \end{aligned}$$

$k = 1$ fournit $x = 8$, $k = 2$ fournit $x = 17$ et $k = 3$ fournit $x = 26$.

Réciproquement,

- si $x = 8$, alors $g(x) \equiv 4 \times 8 + 3\ [27]$ puis $g(x) \equiv 35\ [27]$ puis $g(x) \equiv 35 - 27\ [27]$ puis $g(x) \equiv 8\ [27]$ et enfin $g(x) = 8$.
- si $x = 17$, alors $g(x) \equiv 4 \times 17 + 3\ [27]$ puis $g(x) \equiv 71\ [27]$ puis $g(x) \equiv 71 - 54\ [27]$ puis $g(x) \equiv 17\ [27]$ et enfin $g(x) = 17$.
- si $x = 26$, alors $g(x) \equiv 4 \times 26 + 3\ [27]$ puis $g(x) \equiv 4 \times (-1) + 3\ [27]$ puis $g(x) \equiv -1\ [27]$ puis $g(x) \equiv -1 + 27\ [27]$ puis $g(x) \equiv 26\ [27]$ et enfin $g(x) = 27$.

Les entiers $x$ éléments de $E$ tels que $g(x) = x$ sont 8, 17 et 26. On en déduit que les caractères invariants dans ce codage sont $i$, $r$ et $\star$.

$$\boxed{\text{Les caractères invariants dans ce codage sont } i,\ r \text{ et } \star.}$$

**2)** Soient $x$ et $y$ deux éléments de $E$.

$$\begin{aligned} y \equiv 4x + 3\ [27] &\Rightarrow 7y \equiv 28x + 21\ [27] \\ &\Rightarrow 7y \equiv x - 6\ [27] \text{ (car } 28 = 1 + 27 \text{ et } 21 = -6 + 27) \\ &\Rightarrow x - 6 \equiv 7y\ [27] \Rightarrow x - 6 + 6 \equiv 7y + 6\ [27] \\ &\Rightarrow x \equiv 7y + 6\ [27]. \end{aligned}$$

Soient alors $y_1$ et $y_2$ deux éléments de $E$ codant deux éléments $x_1$ et $x_2$ de $E$.

$$\begin{aligned} y_1 = y_2 &\Rightarrow 7y_1 = 7y_2 \Rightarrow 7y_1 + 6 = 7y_2 + 6 \\ &\Rightarrow 7y_1 + 6 \equiv 7y_2 + 6\ [27] \Rightarrow x_1 \equiv x_2\ [27] \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (car } 0 \leqslant x_1 \leqslant 26 \text{ et } 0 \leqslant x_2 \leqslant 26). \end{aligned}$$

Par contraposition, si $x_1 \neq x_2$, alors $y_1 \neq y_2$ ou encore deux éléments distincts de $E$ sont codés par deux éléments distincts de $E$. Maintenant, deux éléments distincts de $E$ sont associés à deux caractères distincts et deux caractères distincts sont associés à deux éléments distincts de $E$.

On a donc montré que deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts.

**3)** Un caractère d'un mot codé a pour rang un élément $y$ de $E$. On calcule $7y + 6$ puis on calcule le reste $x$ de la division euclidienne de $7y + 6$ par 27. $x$ est le rang du caractère décodé.

**4)** • La lettre $v$ a pour rang le nombre $y = 21$. $7y + 6 \equiv 7 \times (-6) + 6\ [27]$ ou encore $7y + 6 \equiv -36\ [27]$ ou encore $7y + 6 \equiv -36 + 2 \times 27\ [27]$ ou enfin $7y + 6 \equiv 18\ [27]$ avec $0 \leqslant 18 \leqslant 26$. 18 est le rang de la lettre $s$ et donc

la lettre $v$ code la lettre $s$.

• La lettre $f$ est a pour rang le nombre $y = 5$. $7y + 6 \equiv 7 \times 5 + 6\ [27]$ ou encore $7y + 6 \equiv 41\ [27]$ ou encore $7y + 6 \equiv 41 - 27\ [27]$ ou enfin $7y + 6 \equiv 14\ [27]$ avec $0 \leqslant 14 \leqslant 26$. 14 est le rang de la lettre $o$ et donc

la lettre $f$ code la lettre $o$.

Finalement

$$\boxed{\text{le mot « } vfv \text{ » code le mot « } sos \text{ ».}}$$