

EXERCICE 1

1. Étude d'une fonction auxiliaire

a) La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel positif x

$$g(x) = 2xe^x + x^2e^x + 0 = x(x+2)e^x.$$

La fonction g' est strictement positive sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0. Donc, la fonction g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2e^x = +\infty$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de $\left]g(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)\right[= [-1, +\infty[$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule dans $]0, +\infty[$. En particulier, puisque $0 \in [-1, +\infty[$, il existe un réel positif a et un seul tel que $g(a) = 0$.

La calculatrice fournit $g(0,703) = -0,001 \dots < 0$ et $g(0,704) = 0,002 \dots > 0$. Donc $g(0,703) < g(a) < g(0,704)$. Puisque la fonction g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que

$$0,703 < a < 0,704.$$

c) Soit x un réel positif. Puisque la fonction g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, si $x < a$, alors $g(x) < g(a)$ ou encore $g(x) < 0$ et si $x > a$, alors $g(x) > g(a)$ ou encore $g(x) > 0$.

Ainsi, la fonction g est strictement négative sur $]0, a[$, strictement positive sur $]a, +\infty[$ et s'annule en a .

2. Étude de la fonction f

a) **Limite en 0.** $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} e^x = 1$. En additionnant, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = +\infty.$$

Limite en $+\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. En additionnant, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

b) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel strictement positif x ,

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2e^x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

c) Le signe de la fonction g a été étudié en 1). On en déduit le tableau de variation de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

x	0	a	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
f	$+\infty$	$f(a)$	$+\infty$

d) Puisque $g(a) = 0$, on a $a^2e^a - 1 = 0$ puis $a^2e^a = 1$ et enfin, puisque $a \neq 0$, $e^a = \frac{1}{a^2}$.

La fonction f admet un minimum en a . Ce minimum est

$$m = f(a) = e^a + \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}.$$

e) On a $0,703 < a < 0,704$. Par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $]0, +\infty[$, on en déduit que

$$0,703^2 < a^2 < 0,704.$$

Par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, on a

$$\frac{1}{0,704^2} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{0,703^2} \text{ et } \frac{1}{0,704} < \frac{1}{a} < \frac{1}{0,703}.$$

En additionnant membre à membre, on obtient

$$\frac{1}{0,704^2} + \frac{1}{0,704} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} < \frac{1}{0,703^2} + \frac{1}{0,703}$$

La calculatrice fournit $\frac{1}{0,704^2} + \frac{1}{0,704} = 3,438\dots$ et en particulier, $\frac{1}{0,704^2} + \frac{1}{0,704} > 3,43$.

On a aussi $\frac{1}{0,703^2} + \frac{1}{0,703} = 3,445\dots$ et en particulier $\frac{1}{0,703^2} + \frac{1}{0,703} < 3,45$. On a montré que

$$\boxed{3,43 < m < 3,45.}$$

EXERCICE 2

Partie A

Tableau complété.

K	W	U	V
0		2	10
1	2	14/3	8
2	14/3	52/9	43/6

Partie B

1) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{3(u_n + 3v_n) - 4(2u_n + v_n)}{12} = \frac{-5u_n + 5v_n}{12} \\ &= \frac{5}{12}(v_n - u_n).\end{aligned}$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n).$$

b) D'après la question précédente, la suite (w_n) est géométrique de raison $q = \frac{5}{12}$. De plus, $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$. On sait alors que pour tout entier naturel n ,

$$w_n = w_0 \times q^n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, w_n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n.$$

2) a) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{w_n}{3}.$$

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $w_n \geq 0$ et donc pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ou encore, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$. Ceci montre que la suite (u_n) est croissante.

Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{v_n - u_n}{4} = -\frac{w_n}{4}.$$

Pour tout entier naturel n , $w_n \geq 0$ et donc pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n \leq 0$ ou encore, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} \leq v_n$. Ceci montre que la suite (v_n) est décroissante.

La suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.

b) Puisque la suite (u_n) est croissante, pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq u_0$ ou encore pour tout entier naturel n , $u_n \geq 2$.

Puisque la suite (v_n) est décroissante, pour tout entier naturel n , on a $v_n \leq v_0$ ou encore pour tout entier naturel n , $v_n \leq 10$.

Puisque pour tout entier naturel n , on a $w_n \geq 0$, pour tout entier naturel n , on a $v_n \geq u_n$.

Par suite, pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n \leq 10$ et en particulier $u_n \leq 10$. De même, pour tout entier naturel n , $2 \leq u_n \leq v_n$ et en particulier $v_n \geq 2$.

Pour tout entier naturel n , $u_n \leq 10$ et $v_n \geq 2$.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 10. Donc la suite (u_n) est convergente. De même, la suite (v_n) est décroissante et minorée par 2. Donc la suite (v_n) est convergente.

3) Posons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$. On fait tendre n vers $+\infty$ dans les deux membres de cette égalité et on obtient $\ell = \frac{2\ell + \ell'}{3}$ ou encore $3\ell = 2\ell + \ell'$ et donc $\ell = \ell'$.

On a montré que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \frac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \frac{u_n + 3v_n}{4} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n \\ &= 3u_n + 4v_n = t_n. \end{aligned}$$

Donc, la suite (t_n) est constante. On en déduit que pour tout entier naturel n ,

$$t_n = t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 46.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $3u_n + 4v_n = 46$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $3\ell + 4\ell = 46$ ou encore $\ell = \frac{46}{7}$.

On a montré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{46}{7}.$$

EXERCICE 3

Partie A

1) La probabilité que la bille choisie soit aux normes est

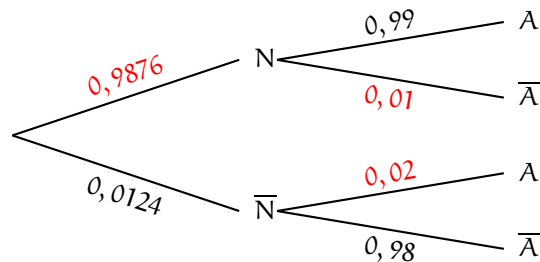
$$P(9 \leq X \leq 11) = P(X \leq 11) - P(X \leq 9) = 0,99379034 - 0,00620967 = 0,98758067.$$

La probabilité que la bille choisie soit hors norme est

$$1 - P(9 \leq X \leq 11) = 1 - 0,98758067 = 0,01241933.$$

En arrondissant à 10^{-4} , on obtient 0,0124.

2) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(N \cap A) + P(\bar{N} \cap A) = P(N) \times P_N(A) + P(\bar{N}) \times P_{\bar{N}}(A) \\ &= (1 - 0,0124) \times 0,99 + 0,0124 \times (1 - 0,98) = 0,9780 \text{ arrondi à } 10^{-4}. \end{aligned}$$

$$P(A) = 0,9780 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

c) La probabilité demandée est $P_A(\bar{N})$.

$$P_A(\bar{N}) = \frac{P(\bar{N} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\bar{N}) \times P_{\bar{N}}(A)}{P(A)} = \frac{0,0124 \times 0,02}{0,9780} = 0,000253 \dots$$

$$P_A(\bar{N}) = 0,0003 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

Partie B

1) Y suit une loi binomiale. En effet,

- 100 expériences identiques et indépendantes sont effectuées (choisir une bille 100 fois);
- chaque expérience a deux issues à savoir « la bille est hors norme » avec une probabilité $p = 0,0124$ et « la bille choisie est aux normes » avec une probabilité $1 - p = 0,9876$.

Donc, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0124$.

2) On sait que l'espérance de Y est $E(Y) = np = 100 \times 0,0124 = 1,24$ et l'écart-type de Y est $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0,0124 \times 0,9876} = 1,1066$ arrondi à 10^{-4} .

$$E(Y) = 1,24 \text{ et } \sigma(Y) = 1,1066 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

3) La probabilité demandée est $P(Y = 2)$. La calculatrice fournit

$$P(Y = 2) = 0,2241 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

4) La probabilité demandée est $P(Y \leq 1)$. La calculatrice fournit

$$P(Y \leq 1) = 0,6477 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

EXERCICE 4

1) Soit x un entier relatif de E .

$$\begin{aligned}g(x) = x &\Rightarrow g(x) \equiv x [27] \Rightarrow 4x + 3 \equiv x [27] \Rightarrow 3x \equiv -3 [27] \\&\Rightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } 3x = -3 + 27k \\&\Rightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } x = -1 + 9k.\end{aligned}$$

Soient alors $k \in \mathbb{Z}$ puis $x = -1 + 9k$.

$$\begin{aligned}x \in E &\Leftrightarrow 0 \leq -1 + 9k \leq 26 \Leftrightarrow 1 \leq 9k \leq 27 \\&\Leftrightarrow \frac{1}{9} \leq k \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq k \leq 3.\end{aligned}$$

$k = 1$ fournit $x = 8$, $k = 2$ fournit $x = 17$ et $k = 3$ fournit $x = 26$.

Réciproquement,

- si $x = 8$, alors $g(x) \equiv 4 \times 8 + 3 [27]$ puis $g(x) \equiv 35 [27]$ puis $g(x) \equiv 35 - 27 [27]$ puis $g(x) \equiv 8 [27]$ et enfin $g(x) = 8$.
- si $x = 17$, alors $g(x) \equiv 4 \times 17 + 3 [27]$ puis $g(x) \equiv 71 [27]$ puis $g(x) \equiv 71 - 54 [27]$ puis $g(x) \equiv 17 [27]$ et enfin $g(x) = 17$.
- si $x = 26$, alors $g(x) \equiv 4 \times 26 + 3 [27]$ puis $g(x) \equiv 4 \times (-1) + 3 [27]$ puis $g(x) \equiv -1 [27]$ puis $g(x) \equiv -1 + 27 [27]$ puis $g(x) \equiv 26 [27]$ et enfin $g(x) = 26$.

Les entiers x éléments de E tels que $g(x) = x$ sont 8, 17 et 26. On en déduit que les caractères invariants dans ce codage sont i , r et \star .

Les caractères invariants dans ce codage sont i , r et \star .

2) Soient x et y deux éléments de E .

$$\begin{aligned}y &\equiv 4x + 3 [27] \Rightarrow 7y \equiv 28x + 21 [27] \\&\Rightarrow 7y \equiv x - 6 [27] \text{ (car } 28 = 1 + 27 \text{ et } 21 = -6 + 27) \\&\Rightarrow x - 6 \equiv 7y [27] \Rightarrow x - 6 + 6 \equiv 7y + 6 [27] \\&\Rightarrow x \equiv 7y + 6 [27].\end{aligned}$$

Soient alors y_1 et y_2 deux éléments de E codant deux éléments x_1 et x_2 de E .

$$\begin{aligned}y_1 = y_2 &\Rightarrow 7y_1 = 7y_2 \Rightarrow 7y_1 + 6 = 7y_2 + 6 \\&\Rightarrow 7y_1 + 6 \equiv 7y_2 + 6 [27] \Rightarrow x_1 \equiv x_2 [27] \\&\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (car } 0 \leq x_1 \leq 26 \text{ et } 0 \leq x_2 \leq 26).\end{aligned}$$

Par contraposition, si $x_1 \neq x_2$, alors $y_1 \neq y_2$ ou encore deux éléments distincts de E sont codés par deux éléments distincts de E . Maintenant, deux éléments distincts de E sont associés à deux caractères distincts et deux caractères distincts sont associés à deux éléments distincts de E .

On a donc montré que deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts.

3) Un caractère d'un mot codé a pour rang un élément y de E . On calcule $7y + 6$ puis on calcule le reste x de la division euclidienne de $7y + 6$ par 27. x est le rang du caractère décodé.

4) • La lettre v a pour rang le nombre $y = 21$. $7y + 6 \equiv 7 \times (-6) + 6 [27]$ ou encore $7y + 6 \equiv -36 [27]$ ou encore $7y + 6 \equiv -36 + 2 \times 27 [27]$ ou enfin $7y + 6 \equiv 18 [27]$ avec $0 \leq 18 \leq 26$. 18 est le rang de la lettre s et donc

la lettre v code la lettre s .

• La lettre f est a pour rang le nombre $y = 5$. $7y + 6 \equiv 7 \times 5 + 6 [27]$ ou encore $7y + 6 \equiv 41 [27]$ ou encore $7y + 6 \equiv 41 - 27 [27]$ ou enfin $7y + 6 \equiv 14 [27]$ avec $0 \leq 14 \leq 26$. 14 est le rang de la lettre o et donc

la lettre f code la lettre o .

Finalement

le mot « vfv » code le mot « sos ».