Liban 2013. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) réponse d)

2) réponse c)

3) réponse c)

4) réponse b)

Explication 1 : Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}(1,2,3)$ et un vecteur directeur directeur de la droite $\mathscr{D}'$ est le vecteur $\overrightarrow{u'}(1,1,-1)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires et donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles. La proposition a) est fausse. Ensuite,

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}' = 1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times (-1) = 0.$$

Donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales. La proposition d) est vraie. Vérifions tout de même que les deux autres propositions sont fausses.

Si le point C appartient à la droite $\mathscr{D}$, il existe un réel t tel que $\left\{\begin{array}{l} -3 = t+1 \\ 5 = 2t-1 \\ 4 = 3t+2 \end{array}\right.$ et donc $\left\{\begin{array}{l} t = -4 \\ t = 3 \\ t = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$. Ceci est impossible et donc C n'appartient pas à $\mathscr{D}$. La proposition c) est fausse.

Puisque les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires si et seulement si ces deux droites sont sécantes. Soient t et k deux réels.

$$\left\{\begin{array}{l} t+1 = k+1 \\ 2t-1 = k+3 \\ 3t+2 = -k+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = t \\ 2t-1 = t+3 \\ 3t+2 = -t+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = t \\ t = 4 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution et donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ n'ont aucun point commun. Ces deux droites n'étant pas parallèles, elles ne sont pas coplanaires. La proposition b) est fausse.

Explication 2 : Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1,1,-1)$. On note que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est le vecteur $\overrightarrow{u'}$ et on rappelle que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux.

On en déduit que la droite $\mathscr{D}'$ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ et que la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$. Donc les propositions a), b) et d) sont fausses. La proposition c) est donc vraie. Vérifions-le.

On sait déjà que $\mathscr{D}'$ est orthogonale à $\mathscr{P}$. Vérifions que la droite $\mathscr{D}$ est contenue dans $\mathscr{P}$. Soit $M(t+1, 2t-1, 3t+2)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$(t+1) + (2t-1) - (3t+2) + 2 = 0.$$

Donc tout point de $\mathscr{D}$ appartient à $\mathscr{P}$ ou encore $\mathscr{D}$ est contenue dans $\mathscr{P}$. La proposition c) est effectivement vraie.

Question 3 :

- $AB = \sqrt{(3-1)^2 + (3+1)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56}$.
- $AC = \sqrt{(-3-1)^2 + (5+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+36+4} = \sqrt{56}$.
- $BC = \sqrt{(-3-3)^2 + (5-3)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56}$.

Donc, le triangle ABC est équilatéral. La proposition c) est vraie. Vérifions tout de même que les autres propositions sont fausses.

Puisque le triangle ABC est équilatéral, il n'est pas rectangle. La proposition b) est fausse.

Les coordonnées du milieu de [AB] sont $\left(\dfrac{1+3}{2}, \dfrac{-1+3}{2}, \dfrac{2+8}{2}\right)$ ou encore $(2,1,5)$. Ce milieu n'est pas le point D et donc la proposition d) est fausse.

Enfin, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-4,6,2)$ et le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(0,3,1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points A, C et D ne sont pas alignés. La proposition a) est fausse.

Question 4 : Le point A n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}'$. En effet, s'il existe un réel k tel que $\left\{\begin{array}{l} 1 = k+1 \\ -1 = k+3 \\ 2 = -k+4 \end{array}\right.$, alors $\left\{\begin{array}{l} k = 0 \\ k = -4 \\ k = 2 \end{array}\right.$. Ceci est impossible et donc le point A n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}'$.
Par suite, le point A et la droite $\mathscr{D}'$ définissent un unique plan que l'on note $\mathscr{P}'$.

Les points $E(0, 2, 5)$ (obtenu quand $k = -1$) et $F(1, 3, 4)$ (obtenu quand $k = 0$) sont deux points distincts de la droite $\mathscr{D}'$. Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $(-1, 3, 3)$ et le vecteur $\overrightarrow{AF}$ a pour coordonnées $(0, 4, 2)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}'$. Si $\overrightarrow{n}$ est le vecteur de la proposition b),

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AE} = 3 \times (-1) + (-1) \times 3 + 2 \times 3 = -3 - 3 + 6 = 0,$$

et

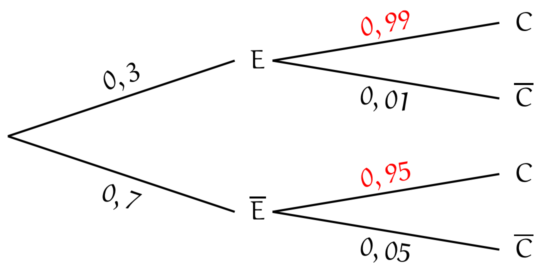
$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AF} = 3 \times 0 + (-1) \times 4 + 2 \times 2 = -4 + 4 = 0.$$

$\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}'$ et donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}'$. La proposition b) est vraie. Les autres propositions sont effectivement fausses car aucun des autres vecteurs n'est colinéaire au vecteur de coordonnées $(3, -1, 2)$.

EXERCICE 2

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre.



2) La probabilité demandée est $p\left(\overline{E}\cap C\right)$.

$$p\left(\overline{E}\cap C\right)=p\left(\overline{E}\right)\times p_{\overline{E}}(C)=p\left(\overline{E}\right)\times\left(1-p_{\overline{E}}\left(\overline{C}\right)\right)=0,7\times(1-0,05)=0,7\times 0,95=0,665.$$

$$\boxed{p\left(\overline{E}\cap C\right)=0,665.}$$

3) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(C)=p\left(E\cap C\right)+p\left(\overline{E}\cap C\right)=p(E)\times p_E(C)+p\left(\overline{E}\right)\times p_{\overline{E}}(C).$$

On connaît déjà $p\left(\overline{E}\cap C\right)=0,665$. D'autre part,

$$p\left(E\cap C\right)=p(E)\times p_E(C)=p(E)\times\left(1-p_E\left(\overline{C}\right)\right)=0,3\times(1-0,01)=0,3\times 0,99=0,297.$$

Finalement,

$$p(C)=0,665+0,297=0,962.$$

$$\boxed{p\left(C\right)=0,962.}$$

4) La probabilité demandée est $p_C(E)$.

$$p_C(E)=\frac{p\left(C\cap E\right)}{p(C)}=\frac{p(E)\times p_E(C)}{p(C)}=\frac{0,3\times 0,99}{0,962}=\frac{0,297}{0,962}=0,308 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

$$\boxed{p_C\left(E\right)=0,308 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

Partie B

1) On rappelle qu'un pot est conforme si et seulement si la proportion de sucre dans la compote est comprise entre $0,16$ et $0,18$. La probabilité demandée est donc $P\left(0,16\leqslant X\leqslant 0,18\right)$. On lit dans le tableau

$$\boxed{\text{la probabilité qu'un petit pot issu de la chaîne } F_1 \text{ soit conforme est } 0,9044 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}}$$

2) a) Z suit la loi normale centrée réduite.

b)

$$0,16\leqslant Y\leqslant 0,18\Leftrightarrow 0,16-m_2\leqslant Y-m_2\leqslant 0,18-m_2\Leftrightarrow\frac{0,16-m_2}{\sigma_2}\leqslant\frac{Y-m_2}{\sigma_2}\leqslant\frac{0,18-m_2}{\sigma_2}$$
$$\Leftrightarrow\frac{0,16-0,17}{\sigma_2}\leqslant Z\leqslant\frac{0,18-0,17}{\sigma_2}\Leftrightarrow-\frac{0,01}{\sigma_2}\leqslant Z\leqslant\frac{0,01}{\sigma_2}$$

Y appartient à l'intervalle $[0,16;0,18]$ si et seulement si Z appartient à l'intervalle $\left[-\frac{0,01}{\sigma_2},\frac{0,01}{\sigma_2}\right]$.

c) L'énoncé donne $P\left(-\frac{0,01}{\sigma_2}\leqslant Z\leqslant\frac{0,01}{\sigma_2}\right)=0,99=P(-2,5758\leqslant Z\leqslant 2,5758)$.

D'après le cours, on sait que

$$P\left(-\frac{0,01}{\sigma_2} \leqslant Z \leqslant \frac{0,01}{\sigma_2}\right) = P(-2,5758 \leqslant Z \leqslant 2,5758) \Leftrightarrow \frac{0,01}{\sigma_2} = 2,5758 \Leftrightarrow \sigma_2 = \frac{0,01}{2,5758}.$$

La calculatrice fournit alors

$$\boxed{\sigma_2 = 0,004 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par excès.}}$$

EXERCICE 3

Partie A

1) Limite en $-\infty$. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + e^{-x}\right) = +\infty$.

En prenant l'inverse, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1 + e^{-x}} = 0$.

Limite en $+\infty$. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + e^{-x}\right) = 1$.

En prenant l'inverse, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + e^{-x}} = \dfrac{1}{1} = 1$.

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 1.}$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}_1$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_1$ en $+\infty$.

2) Soit x un réel. On sait que $e^x \neq 0$ et que $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ puis

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{e^x}} = \frac{1}{\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x}\right)} = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f_1(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.}$$

3) La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$f_1'(x) = \frac{e^x \times (e^x + 1) - e^x \times e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f_1'(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.}$$

Pour tout réel x, $e^x > 0$ et $(1 + e^x)^2 > 0$. Donc pour tout réel x, $f_1'(x) > 0$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } f_1 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

4) D'après la question 2), pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

Posons pour tout réel x, $u(x) = 1 + e^x$. Alors, la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = e^x$ puis

$$f_1(x) = \frac{u'(x)}{u(x)},$$

la fonction u étant strictement positive sur $\mathbb{R}$. On sait qu'une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ est la fonction F_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x, $F_1(x) = \ln(u(x)) = \ln\left(1 + e^x\right)$. On en déduit que

$$I = \int_0^1 f_1(x)\,dx = [F_1(x)]_0^1 = \ln\left(1 + e^1\right) - \ln\left(1 + e^0\right) = \ln\left(\frac{1 + e}{2}\right).$$

$$\boxed{I = \ln\left(\frac{1 + e}{2}\right).}$$

La fonction f_1 est continue et positive sur le segment $[0, 1]$. On sait alors que I est l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine du plan compris entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_1$.

Partie B

Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}_{-1}$ d'abscisse x.
On note K le milieu du segment $[MP]$.

1) Soit x un réel. D'après la question 2) de la partie A, $f_1(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$. Donc,

$$f_1(x) + f_{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x+1}{1+e^x} = 1.$$

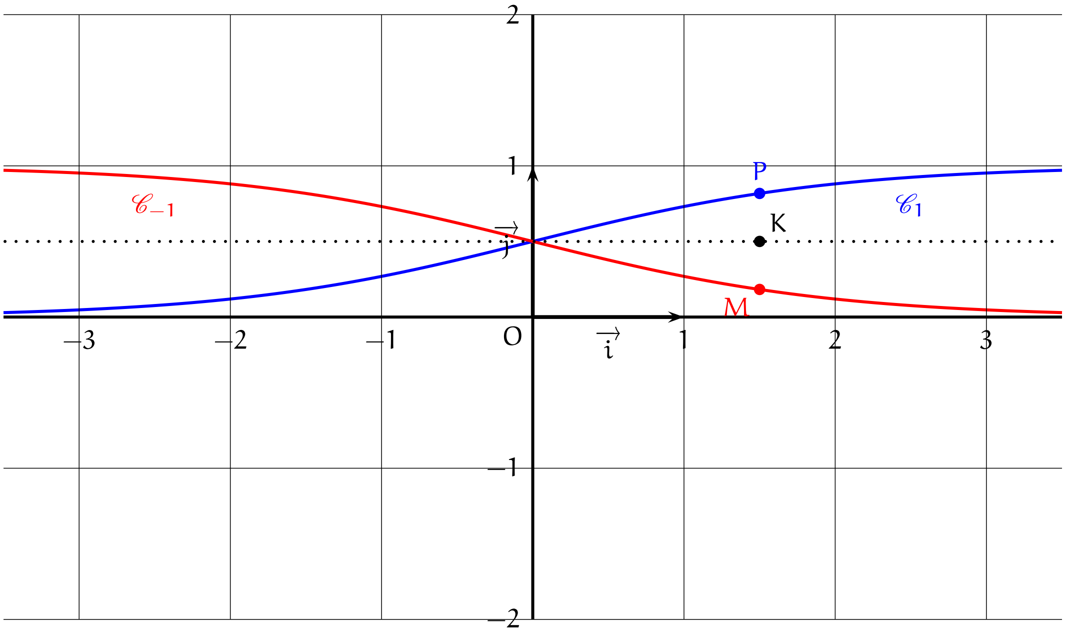
$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f_1(x) + f_{-1}(x) = 1.}$$

2) Les points M et P ont la même abscisse x. Donc $x_K = x$. D'autre part

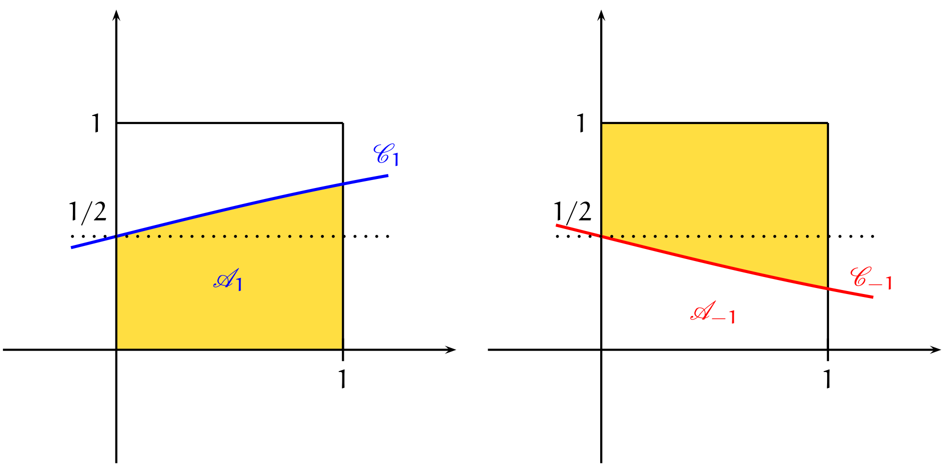
$$y_K = \frac{y_M + y_P}{2} = \frac{f_1(x) + f_{-1}(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

3) La courbe $\mathscr{C}_{-1}$ se déduit donc de la courbe $\mathscr{C}_1$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.



4) Notons $\mathscr{A}_1$ (resp. $\mathscr{A}_{-1}$) l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_1$ (respectivement $\mathscr{C}_{-1}$).



Pour des raisons de symétrie, les deux aires en jaune sont égales et donc, l'aire du carré unité étant égale à 1, on a $\mathscr{A}_{-1} = 1 - \mathscr{A}_1$. L'aire $\mathscr{A}$ demandée est alors :

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_{-1} = \mathscr{A}_1 - (1 - \mathscr{A}_1) = 2\mathscr{A}_1 - 1 = 2\ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - 1.$$

$$\boxed{\text{L'aire demandée, exprimée en unités d'aire, est égale à } 2\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)-1.}$$

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1) Soit k un réel. Pour tout réel x, $e^{-kx} > 0$ et donc $\frac{1}{1+e^{-kx}} > 0$ ou encore $f_k(x) > 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned} e^{-kx} > 0 &\Rightarrow 1+e^{-kx} > 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{1+e^{-kx}} < 1 \text{ (par stricte décroissance de la fonction } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ sur }]0,+\infty[) \\ &\Rightarrow f_k(x) < 1. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel k et pour tout réel x, $0 < f_k(x) < 1$. Il revient au même de dire que pour tout réel k, la courbe $\mathscr{C}_k$ est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

$$\boxed{\text{L'affirmation 1) est VRAIE.}}$$

2) La fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ d'après la partie A. Grâce à la symétrie obtenue en partie B, la fonction f_{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, il existe un réel k pour lequel la fonction f_k n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{L'affirmation 2) est FAUSSE.}}$$

3) Soit k un réel.

$$\begin{aligned} k \geqslant 10 &\Leftrightarrow -\frac{k}{2} \leqslant -\frac{10}{2} \Leftrightarrow -\frac{k}{2} \leqslant -5 \\ &\Leftrightarrow e^{-\frac{k}{2}} \leqslant e^{-5} \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow 1+e^{-\frac{k}{2}} \leqslant 1+e^{-5} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-\frac{k}{2}}} \geqslant \frac{1}{1+e^{-5}} \text{ (par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 0,993\ldots \\ &\Rightarrow f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 0,99 \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel $k \geqslant 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 0,99$.

$$\boxed{\text{L'affirmation 3) est VRAIE.}}$$

EXERCICE 4

Partie A

1) • L'algorithme n° 1 n'affiche qu'un seul terme de la suite et ne convient donc pas.

• L'algorithme n° 2 remet à chaque étape la valeur 1 dans v avant d'afficher.
L'algorithme n° 2 fait donc afficher 1, 1, 1 ... ce qui est faux.

• On doit maintenant noter que malheureusement, l'algorithme n° 3 n'affiche que les termes v_0, v_1, ... ,v_{n-1} et n'affiche pas v_n. L'algorithme n° 3 ne convient pas non plus. C'est néanmoins l'algorithme le plus proche de ce que l'on veut. D'ailleurs dans la question suivante, quand $n = 10$, on a dix valeurs à l'affichage c'est-à-dire v_0, v_1, ..., v_9 et pas v_{10}.

Un algorithme répondant à la question serait

Algorithme N° 3 bis

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels
 	
Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
    Afficher v
    v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme

2) Il semblerait que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit strictement croissante et converge vers un réel proche de 3.

3) a) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

- $v_0 = 1$ et $0 < 1 < 3$. Donc $0 < v_0 < 3$. L'encadrement à démontrer est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $0 < v_n < 3$ et montrons que $0 < v_{n+1} < 3$.

$$\begin{aligned} 0 < v_n < 3 &\Rightarrow -3 < -v_n < 0 \Rightarrow 3 < 6 - v_n < 6 \\ &\Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{6-v_n} < \frac{1}{3} \text{ (par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[) \\ &\Rightarrow \frac{9}{6} < \frac{9}{6-v_n} < \frac{9}{3} \\ &\Rightarrow 0 < v_{n+1} < 3. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 < v_n < 3.}$$

b) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6-v_n} - v_n = \frac{9 - v_n(6-v_n)}{6-v_n} = \frac{v_n^2 - 6v_n + 9}{6-v_n} = \frac{(v_n-3)^2}{6-v_n}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n-3)^2}{6-v_n}.}$$

Soit n un entier naturel. D'après la question $v_n < 3$ et en particulier, $6 - v_n > 0$ et aussi $(v_n - 3)^2 > 0$.
On en déduit que pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} - v_n > 0$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

c) La suite (v_n) est croissante d'après la question 3)b) et majorée par 3 d'après la question 3)a).
On en déduit que la suite (v_n) converge.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est convergente.}}$$

Partie B. Recherche de la limite de la suite (v_n)

1) Puisque pour tout entier naturel n, on a $v_n \neq 3$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Soit n un entier naturel.

$$w_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}-3} = \frac{1}{\dfrac{9}{6-v_n}-3} = \frac{1}{\left(\dfrac{9-3(6-v_n)}{6-v_n}\right)} = \frac{1}{\left(\dfrac{3v_n-9}{6-v_n}\right)} = \frac{6-v_n}{3(v_n-3)},$$

puis

$$w_{n+1} - w_n = \frac{6-v_n}{3(v_n-3)} - \frac{1}{v_n-3} = \frac{6-v_n-3}{3(v_n-3)} = \frac{-(v_n-3)}{3(v_n-3)} = -\frac{1}{3}.$$

Donc, pour tout entier naturel n, $w_{n+1} - w_n = -\dfrac{1}{3}$ et on en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ est arithmétique de raison } r = -\frac{1}{3}.}$$

2) Déjà, $w_0 = \dfrac{1}{v_0-3} = \dfrac{1}{1-3} = -\dfrac{1}{2}$. Mais alors, pour tout entier naturel n,

$$w_n = w_0 + nr = -\frac{1}{2} - \frac{n}{3} = -\frac{2n+3}{6},$$

puis

$$v_n = 3 + \frac{1}{w_n} = 3 - \frac{6}{2n+3}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_n = 3 - \frac{6}{2n+3}.}$$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+3) = +\infty$ puis en prenant l'inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+3} = 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 3 - 6 \times 0 = 3.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 3.}$$

