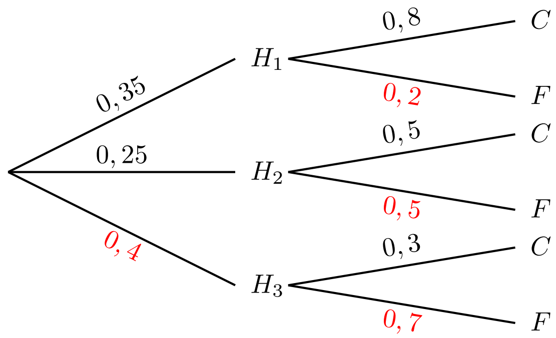
France métropolitaine 2013. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) a) Représentons la situation par un arbre.



b) La probabilité demandée est $p\,(C \cap H_3)$.

$$p\,(C \cap H_3) = p\,(H_3) \times p_{H_3}(C) = (1 - p\,(H_1) - p\,(H_2)) \times p_{H_3}(C)$$
$$= (1 - 0,35 - 0,25) \times 0,3 = 0,4 \times 0,3 = 0,12.$$

$$\boxed{p\,(C \cap H_3) = 0,12.}$$

c) D'après la formule des probabilités totales,

$$p\,(C) = p\,(C \cap H_1) + p\,(C \cap H_2) + p\,(C \cap H_3) = p\,(H_1) \times p_{H_1}(C) + p\,(H_2) \times p_{H_2}(C) + p\,(H_3) \times p_{H_3}(C)$$
$$= 0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,12 = 0,28 + 0,125 + 0,12 = 0,525.$$

$$\boxed{p\,(C) = 0,525.}$$

d) La probabilité demandée est $p_C\,(H_1)$.

$$p_C\,(H_1) = \frac{p\,(C \cap H_1)}{p(C)} = \frac{p\,(H_1) \times p_{H_1}(C)}{p(C)} = \frac{0,35 \times 0,8}{0,525} = 0,533 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

$$\boxed{p_C\,(H_1).}$$

2) a) X suit une loi binomiale. En effet,

• 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées (choisir un arbre 10 fois) ;
• chaque expérience a deux issues à savoir « l'arbre choisi est un conifère » avec une probabilité $p = 0,525$ (d'après la question 1)c)) et « l'arbre choisi n'est pas un conifère » avec une probabilité $1 - p = 0,475$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,525$.

b) La probabilité demandée est $p(X = 5)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{p(X = 5) = 0,243 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

c) La probabilité demandée est $p(X \leqslant 8)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{p(X \leqslant 8) = 0,984 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

EXERCICE 2

1) a) $f(1)$ est l'ordonnée du point B à savoir 2.
$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en B. Cette tangente est la droite (BC) de coefficient directeur 0. Donc, $f'(1) = 0$.

$$\boxed{f(1) = 2 \text{ et } f'(1) = 0.}$$

b) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout réel strictement positif x,

$$f'(x) = \frac{b \times \dfrac{1}{x} \times x - (a + b\ln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{b - a - b\ln(x)}{x^2} = \frac{(b-a) - b\ln(x)}{x^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ f'(x) = \frac{(b-a) - b\ln(x)}{x^2}.}$$

c) L'égalité $f(1) = 2$ s'écrit $\dfrac{a + b\ln(1)}{1} = 2$ ou encore $a = 2$.
L'égalité $f'(1) = 0$ s'écrit $\dfrac{(b-a) - b\ln(1)}{1^2} = 0$ ou encore $b - a = 0$ ou enfin $b = a = 2$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ f(x) = \frac{2 + 2\ln(x)}{x^2}.}$$

2) a) D'après la question b) appliquée avec $a = b = 2$, pour tout réel $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{-2\ln(x)}{x^2}.$$

Pour tout réel $x > 0$, on a $\dfrac{2}{x^2} > 0$ et donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-\ln(x)$. Le signe de $\ln(x)$ étant connu, on en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $]0, 1[$, strictement négative sur $]1, +\infty[$ et s'annule en 1.

b) Limite en 0**.** Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x}(2 + 2\ln(x))$. On sait que $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (2 + 2\ln(x)) = -\infty$. D'autre part, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty.}$$

Limite en $+\infty$**.** Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{\ln(x)}{x}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. D'autre part, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x} + 2 \times \frac{\ln(x)}{x}\right) = 0 + 2 \times 0 = 0.$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

c) Des deux questions précédentes, on déduit le tableau de variations de le fonction f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
f	‖	$-\infty \nearrow$	2	$\searrow$	0

3) a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0,1]$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $\left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x), f(1)\right] =]-\infty, 2]$, il existe un réel x_0 et un seul de l'intervalle $]0,1]$ tel que $f(x_0) = k$. Comme le réel 1 appartient à $]-\infty, 2]$, il existe un réel de $]0,1]$ et un seul, noté α, tel que $f(\alpha) = 1$.

b) La calculatrice fournit $f(5) = 1,04\ldots$ et $f(6) = 0,9\ldots$. Donc, $f(5) > f(\beta) > f(6)$. Puisque la fonction f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit que

$$\boxed{5 < \beta < 6.}$$

4) a)

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	$0,25$	$0,375$	$0,4375$
b	1	$0,5$	$0,5$	$0,5$	$0,5$
$b-a$	1	$0,5$	$0,25$	$0,125$	$0,0625$
m	$0,5$	$0,25$	$0,375$	$0,4375$	

b) Les valeurs finales de a et de b affichées par cet algorithme sont les bornes d'un encadrement de α d'amplitude au plus 10^{-1}. La méthode utilisée pour obtenir cet encadrement est la méthode par dichotomie.

c) Algorithme modifié.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 5
	Affecter à b la valeur 6
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.
	Si $f(m) > 1$ alors affecter à a la valeur m.
	Sinon affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b.

5) a) L'aire du rectangle $OABC$, exprimée en unités d'aires, est égale à $1 \times 2 = 2$. La moitié de cette aire est égale à 1.

Déterminons maintenant l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe (Ox).

Soit x un réel strictement positif.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(1+\ln(x))}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

Enfin, la fonction f est croissante sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ et, puisque $f\left(\frac{1}{e}\right) = 0$, on en déduit que la fonction f est positive sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Par suite, l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et la droite d'équation $x = 1$ est $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx$.

Finalement, la courbe $\mathscr{C}$ paratge le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales si et seulement si

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx = 1.$$

b) Calculons $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x} \times \ln(x)$ est de la forme $u' \times u$ avec pour tout $x > 0$, $u(x) = \ln(x)$.

On sait qu'une primitive de la fonction $u'u$ est la fonction $\frac{1}{2}u^2$ et donc

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\ dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left(2\times\frac{1}{x}+2\times\frac{1}{x}\times\ln(x)\right)\ dx = \left[2\ln(x)+2\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$$
$$= \left(2\ln(1)+2\frac{(\ln(1))^2}{2}\right) - \left(2\ln(1/e)+2\frac{(\ln(1/e))^2}{2}\right)$$
$$= -\left(-2+(-1)^2\right) = 1.$$

$$\boxed{\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\ dx = 1.}$$

On a ainsi démontré que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.

EXERCICE 3

1) VRAI

2) FAUX

3) VRAI

4) VRAI

Justification 1. Soient A et B les points du plan d'affixes respectives i et -1. Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z.

$$|z-i| = |z+1| \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M \in \text{med}[AB].$$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[AB]$ qui est effectivement une droite. La proposition 1 est vraie.

Justification 2.

$$\begin{aligned}\left(1+i\sqrt{3}\right)^4 &= \left(\left(1+i\sqrt{3}\right)^2\right)^2 = \left(1+2i\sqrt{3}-3\right)^2 = \left(-2+2i\sqrt{3}\right)^2\\ &= 2^2\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2 = 4\left(1-2i\sqrt{3}-3\right) = -8-8i\sqrt{3}.\end{aligned}$$

La partie imaginaire de $\left(1+i\sqrt{3}\right)^4$ est $-8\sqrt{3}$ et en particulier n'est pas nulle. On en déduit que $\left(1+i\sqrt{3}\right)^4$ n'est pas un nombre réel. La proposition 2 est fausse.

Justification 3.

1ère solution. Tout d'abord

$$\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BG} = \left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}\right).\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{FC}.\overrightarrow{BG}.$$

Puisque $ABCDEFGH$ est un cube, la droite (EF) est perpendiculaire aux droite (FB) et (FG) qui sont deux droites sécantes du plan (BFG). On en déduit que la droite (EF) est orthogonale à toute droite du plan (BFG) et en particulier, la droite (EF) est orthogonale à la droite (BG). Par suite, $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BG} = 0$.

D'autre part, la face $BCFG$ est un carré. Ses diagonales, à savoir $[FC]$ et $[BG]$ sont perpendiculaires. Par suite, $\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{BG} = 0$.

Mais alors,

$$\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{FC}.\overrightarrow{BG} = 0+0 = 0.$$

Ceci montre que les droites (EC) et (BG) sont orthogonales. La proposition 3 est vraie.

2ème solution. On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Le point E a pour coordonnées $(0,0,1)$ et le point C a pour coordonnées $(1,1,0)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $(1,1,-1)$.

Le point B a pour coordonnées $(1,0,0)$ et le point G a pour coordonnées $(1,1,1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $(0,1,1)$. Ensuite

$$\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BG} = 1\times 0 + 1\times 1 + (-1)\times 1 = 0.$$

On retrouve ainsi le fait que les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.

Justification 4. Soient $\mathscr{D}$ la droite passant par $S(1,-2,-2)$ et perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ et Δ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=2+t\\ y=-1+t\\ z=1+3t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1,1,3)$. La droite $\mathscr{D}$ est donc la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(1,1,3)$ passant par le point $S(1,-2,-2)$.

D'autre part, la droite Δ admet pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(1,1,3)$ et pour $t=-1$, on obtient $\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=-2\\ z=-2\end{array}\right.$ qui sont les coordonnées du point S. Donc Δ est aussi la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(1,1,3)$ passant par le point $S(1,-2,-2)$. Finalement, $\mathscr{D} = \Delta$. La proposition 4 est vraie.

EXERCICE 4

1) a) $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{3} \times 0 + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3} = 2,33$ à 10^{-2} près.

$u_2 = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} \times 1 + 1 = \frac{14}{9} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{26}{9} = 2,88$ à 10^{-2} près.

$u_3 = \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3} \times 2 + 1 = \frac{52}{27} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{97}{27} = 3,59$ à 10^{-2} près.

$u_4 = \frac{2}{3}u_3 + \frac{1}{3} \times 3 + 1 = \frac{194}{81} + 2 = \frac{356}{81} = 4,39$ à 10^{-2} près.

b) Il semblerait que la suite (u_n) soit strictement croissante.

2) a) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n + 3$.

- $u_0 = 2$ et $2 \leqslant 0 + 3$. Donc l'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \leqslant n + 3$ et montrons que $u_{n+1} \leqslant (n + 1) + 3$.

$$\begin{aligned}
u_n \leqslant n + 3 &\Rightarrow \frac{2}{3}u_n \leqslant \frac{2}{3}(n + 3) \Rightarrow \frac{2}{3}u_n \leqslant \frac{2}{3}n + 2 \\
&\Rightarrow \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leqslant \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1 \Rightarrow u_{n+1} \leqslant n + 3 \\
&\Rightarrow u_{n+1} \leqslant (n + 1) + 3 \text{ (car } n + 3 \leqslant (n + 1) + 3).
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \leqslant n + 3.}$$

b) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{1}{3}(-u_n + n + 3) \\
&= \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).}$$

c) Soit n un entier naturel. D'après la question précédente, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$. Mais d'après la question 2)a), $u_n \leqslant n + 3$ et donc $n + 3 - u_n \geqslant 0$ puis $\frac{1}{3}(n + 3 - u_n) \geqslant 0$ puis $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et finalement $u_n \leqslant u_{n+1}$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

3) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) &= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) \\
&= \frac{2}{3}v_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = \frac{2}{3}.}$$

b) $v_0 = u_0 - 0 = 2$. On sait alors que pour tout entier naturel n

$$v_n = v_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Mais alors, pour tout entier naturel n,

$$u_n = v_n + n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n.}$$

c) Puisque $-1 < \frac{2}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$. Puisque pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + n$, en additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

4) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n &= \left(2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 + 0\right) + \left(2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 + 1\right) + \ldots + \left(2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n\right) \\
&= 2\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + (0 + 1 + \ldots + n) \\
&= 2\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{n(n+1)}{2} \text{ (car } \frac{2}{3} \neq 1) \\
&= 2 \times 3 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2} = 6\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ S_n = 6\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}.}$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
\frac{S_n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left(6\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}\right) &= \frac{6}{n^2}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2n^2} \\
&= \frac{6}{n^2}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n+1}{2n} \\
&= \frac{6}{n^2}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{6}{n^2} = 0$.

En multipliant, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{6}{n^2}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 0 \times 1 = 0$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} = 0$, on obtient finalement

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^2} = \frac{1}{2}.}$$

