BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Spécifique

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Un industriel fabrique des vannes électroniques destinées à des circuits hydrauliques. Les quatre parties A, B, C, D sont indépendantes.

Partie A

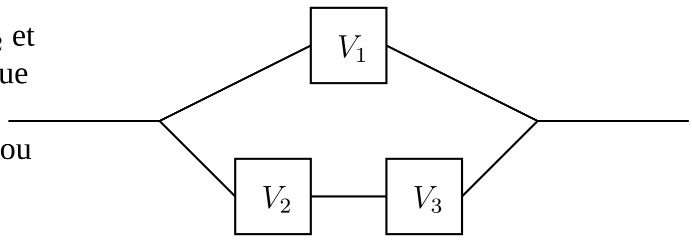
La durée de vie d'une vanne, exprimée en heures, est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,000\,2$.

1) Quelle est la durée de vie moyenne d'une vanne ?

2) Calculer la probabilité, à $0,001$ près, que la durée de vie d'une vanne soit supérieure à $6\,000$ heures.

Partie B

Avec trois vannes identiques V_1, V_2 et V_3, on fabrique le circuit hydraulique ci-contre. Le circuit est en état de marche si V_1 est en état de marche ou si V_2 et V_3 le sont simultanément.

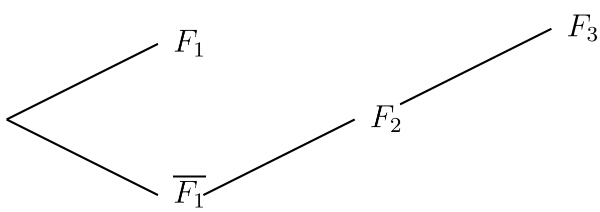


On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après $6\,000$ heures. On note :

- F_1 l'événement : « la vanne V_1 est en état de marche après $6\,000$ heures ».
- F_2 l'événement : « la vanne V_2 est en état de marche après $6\,000$ heures »
- F_3 l'événement : « la vanne V_3 est en état de marche après $6\,000$ heures ».
- E : l'événement : « le circuit est en état de marche après $6\,000$ heures ».

On admet que les événements F_1, F_2 et F_3 sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité égale à $0,3$.

1) L'arbre probabiliste ci-contre représente une partie de la situation. Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.
2) Démontrer que $P(E) = 0,363$.
3) Sachant que le circuit est en état de marche après $6\,000$ heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment là. Arrondir au millième.



Partie C

L'industriel affirme que seulement 2% des vannes qu'il fabrique sont défectueuses. On suppose que cette affirmation est vraie, et l'on note F la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon aléatoire de 400 vannes prises dans la production totale.

1) Déterminer l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la variable F.

2) On choisit 400 vannes au hasard dans la production. On assimile ce choix à un tirage aléatoire de 400 vannes, avec remise, dans la production.
Parmi ces 400 vannes, 10 sont défectueuses.
Au vu de ce résultat peut-on remettre en cause, au seuil de 95%, l'affirmation de l'industriel ?

Partie D

Dans cette partie, les probabilités calculées seront arrondies au millième.
L'industriel commercialise ses vannes auprès de nombreux clients. La demande mensuelle est une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 800$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1) Déterminer $P(760 \leqslant D \leqslant 840)$.

2) Déterminer $P(D \leqslant 880)$.

3) L'industriel pense que s'il constitue un stock mensuel de 880 vannes, il n'aura pas plus de 1% de chance d'être en rupture de stock. A-t-il raison ?

EXERCICE 2 (4 points)

(commun à tous les candidats)

Les quatre questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère

- les points $A(12; 0; 0)$, $B(0; -15; 0)$, $C(0; 0; 20)$, $D(2; 7; -6)$, $E(7; 3; -3)$;
- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $2x + y - 2z - 5 = 0$

Affirmation 1. Une équation cartésienne du plan parallèle à $\mathscr{P}$ et passant par le point A est :

$$2x + y + 2z - 24 = 0.$$

Affirmation 2. Une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 9 - 3t \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t \end{array}\right. , \; t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 3. La droite (DE) et le plan $\mathscr{P}$ ont au moins un point commun.

Affirmation 4. La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

EXERCICE 3 (5 points)

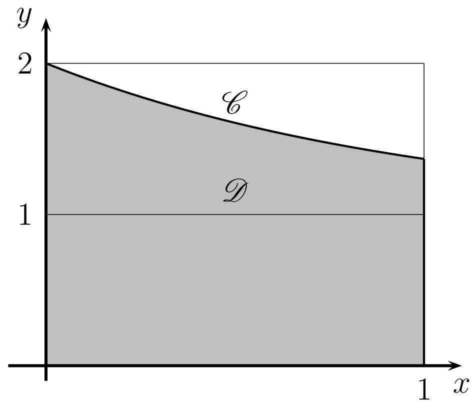
(commun à tous les candidats)

On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ par :

$$g(x) = 1 + e^{-x}.$$

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $g(x) > 0$.

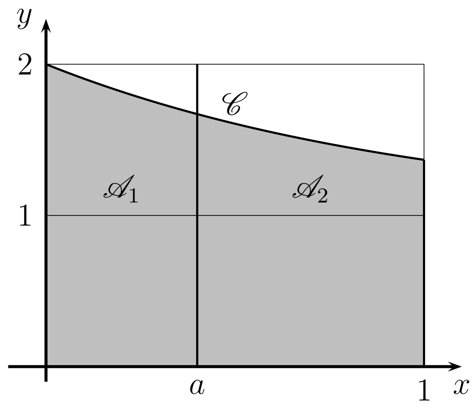
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal, et $\mathscr{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. La courbe $\mathscr{C}$ et le domaine $\mathscr{D}$ sont représentés ci-contre.



Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

Partie A

Soit a un réel tel que $0 < a < 1$.
On note $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox),les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$, puis $\mathscr{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.
$\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont exprimées en unités d'aire.



1) a) Démontrer que $\mathscr{A}_1 = a - e^{-a} + 1$.

b) Exprimer $\mathscr{A}_2$ en fonction de a.

2) Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e}.$$

a) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.

b) Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0;1]$, en un réel α.
Donner la valeur de α arrondie au centième.

3) En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales.

Partie B

Soit b un réel positif.
Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

1) Justifier l'inégalité $b < 1 + \dfrac{1}{e}$. On pourra utiliser un argument graphique.

2) Déterminer la valeur exacte du réel b.

EXERCICE 4 (5 points)

(candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)}.$$

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.
Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables :	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $1,5$

Traitement :	Tant que $n < 9$
	  Affecter à u la valeur …
	  Affecter à n la valeur …
	Fin de Tant que

Sortie :	Afficher la variable u

1) Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.

2) Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?

3) Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	$\dots$	99	100
u_n	$1,5$	$0,625$	$0,375$	$0,265\,6$	$0,206\,3$	$0,169\,3$	$\dots$	$0,010\,2$	$0,010\,1$

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

2) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{1 + (0,5)^n}{n}$.

3) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4) Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1 + (1 + 0,5n)\,(0,5)^n}{n(n+1)}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.