Centres étrangers 2013. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) La durée de vie moyenne d'une vanne est l'espérance de la variable aléatoire T.
On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$ et donc l'espérance de T est $\dfrac{1}{0,000\,2} = 5000$.

$$\boxed{\text{Une vanne dure en moyenne } 5000 \text{ heures.}}$$

2)

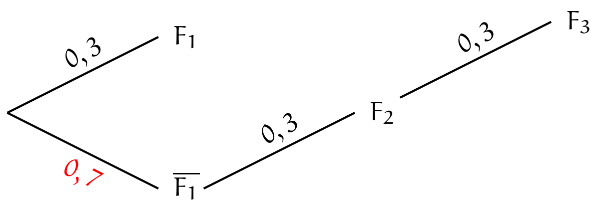
$$P(T \geqslant 6000) = 1 - P(T \leqslant 6000) = 1 - \int_0^{6000} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{6000}$$
$$= 1 - \left(-e^{0,0002\times 6000} + e^0\right) = 1 + e^{-1,2} - 1 = e^{-1,2}.$$

Donc,

$$\boxed{P(T \geqslant 6000) = e^{-1,2} = 0,301 \text{ à } 0,001 \text{ près.}}$$

Partie B

1) Puisque les événements F_1 et F_2 sont indépendants, on sait que les événements $\overline{F_1}$ et F_2 sont indépendants. Par suite, $P_{\overline{F_1}}(F_2) = P(F_2) = 0,3$. De même, $P_{\overline{F_1}\cap F_2}(F_3) = P(F_3) = 0,3$.



2) D'après la formule des probabilités totales

$$P(E) = P(F_1) + P\left(\overline{F_1} \cap (F_2 \cap F_3)\right) = P(F_1) + (1 - P(F_1)) \times P(F_2) \times P(F_3) = 0,3 + 0,7 \times 0,3 \times 0,3$$
$$= 0,3 + 0,063 = 0,363.$$

$$\boxed{P(E) = 0,363.}$$

3) La probabilité demandée est $P_E(F_1)$.

$$P_E(F_1) = \frac{P(E \cap F_1)}{P(E)} = \frac{P(F_1) \times P_{F_1}(E)}{P(E)} = \frac{0,3 \times 1}{0,363} = \frac{0,3}{0,363} = \frac{300}{363} = \frac{100}{121}.$$

et donc

$$\boxed{P_E(F_1) = \frac{100}{121} = 0,826 \text{ arrondi au millième.}}$$

Partie C

1) Ici, $n = 400$ et $p = 0,02$. On note que l'on a $n \geqslant 30$, $np = 8$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) = 392$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$.
L'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la variable F est

$$\left[0,02-1,96\frac{\sqrt{0,02\times 0,98}}{\sqrt{400}}, 0,02+1,96\frac{\sqrt{0,02\times 0,98}}{\sqrt{400}}\right] = [0,00628; 0,03372].$$

2) La fréquence observée est $f = \dfrac{10}{400} = 0,025$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation déterminé à la question précédente.
Donc, on ne peut pas remettre en cause, au seuil de 95%, l'affirmation de l'industriel.

Partie D

1) La calculatrice fournit $P(760 \leqslant D \leqslant 840) = 0,683$ arrondi au millième (le cours dit que $P(\mu-\sigma \leqslant D \leqslant \mu+\sigma) \approx 0,68$).

2) La calculatrice fournit $P(D \leqslant 880) = 0,9772...$ et donc $P(D \leqslant 880) = 0,977$ arrondi au millième.

3) La probabilité d'être en rupture de stock est

$$p(D > 880) = 1 - P(D \leqslant 880) = 0,0227\ldots,$$

soit un peu plus que $2,2\%$ de chance. Donc, l'industriel a tort.

EXERCICE 2

1) FAUX

2) VRAI

3) FAUX

4) VRAI

Justification 1. Notons $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $2x + y + 2z - 24 = 0$.
Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(2, 1, -2)$ et un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$ est le vecteur $\overrightarrow{n'}(2, 1, 2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires et donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles.

L'affirmation 1 est donc fausse.

Justification 2. Notons $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 9 - 3t \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-12, 0, 20)$. Un vecteur directeur de la droite (AC) est le vecteur $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ de coordonnées $(-3, 0, 5)$. $\overrightarrow{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et donc les droites $\mathscr{D}$ et (AC) sont parallèles.

Quand $t = -1$, on obtient le point de coordonnées $(12, 0, 0)$ c'est-à-dire le point A. La droite $\mathscr{D}$ contient donc le point A. Ainsi, les droites $\mathscr{D}$ et (AC) sont parallèles et ont un point commun. On en déduit que ces deux droites sont confondues ou encore, une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 9 - 3t \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DE}$ sont $(5, -4, 3)$. Une représentation paramétrique de la droite (DE) est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 + 5t \\ y = 7 - 4t \\ z = -6 + 3t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

Soit $M(2 + 5t, 7 - 4t, -6 + 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (DE).

$$m \in \mathscr{P} \Leftrightarrow 2(2 + 5t) + (7 - 4t) - 2(-6 + 3t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 0t + 18 = 0.$$

Cette équation n'a pas de solution et donc la droite (DE) et le plan $\mathscr{P}$ n'ont pas de point commun. L'affirmation 3 est fausse.

Affirmation 4. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-12, -15, 0)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-12, 0, 20)$. On note que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les droites (AB) et (AC) sont deux droites sécantes du plan (ABC).

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE} = (-12) \times 5 + (-15) \times (-4) + 0 \times 3 = -60 + 60 = 0,$$

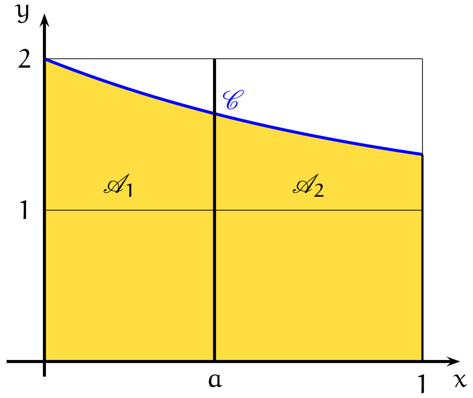
et

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE} = (-12) \times 5 + 0 \times (-4) + 20 \times 3 = -60 + 60 = 0.$$

La droite (DE) est orthogonale est donc orthogonale aux droites (AB) et (AC) qui sont deux droites sécantes du plan (ABC) et donc la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC). L'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 3

Partie A



1) a) La fonction g est continue et positive sur l'intervalle $[0,1]$. Donc,

$$\mathscr{A}_1 = \int_0^a \left(1+e^{-x}\right) dx = \left[x - e^{-x}\right]_0^a = \left(a - e^{-a}\right) - \left(0 - e^0\right) = a - e^{-a} + 1.$$

b) De même,

$$\mathscr{A}_2 = \int_a^1 \left(1+e^{-x}\right) dx = \left[x - e^{-x}\right]_a^1 = \left(1 - e^{-1}\right) - \left(a - e^{-a}\right) = 1 - \frac{1}{e} - a + e^{-a}.$$

2) a) La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0,1]$ et pour tout réel x de $[0,1]$,

$$f'(x) = 2 - 2\left(-e^{-x}\right) = 2\left(1+e^{-x}\right).$$

Pour tout réel x de $[0,1]$, $e^{-x} > 0$ et donc, pour tout réel x de $[0,1]$, $f'(x) > 0$.
En tenant compte de $f(0) = 0 - 2e^0 + \dfrac{1}{e} = -2 + \dfrac{1}{e}$ et $f(1) = 2 - 2e^{-1} + \dfrac{1}{e} = 2 - \dfrac{1}{e}$, on peut dresser le tableau de variations de la fonction f :

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
f	$-2+\frac{1}{e}$	$2-\frac{1}{e}$

b) Le fonction f est continue et strictement croissante sur $[0,1]$. On sait que pour tout réel k de $[f(0), f(1)] = \left[-2+\dfrac{1}{e}, 2-\dfrac{1}{e}\right]$, l'équation $f(x) = k$ a une solution et une seule dans $[0,1]$. En particulier, puisque $-2+\dfrac{1}{e} < 0 < 2-\dfrac{1}{e}$, la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0;1]$, en un réel que l'on note α.

La calculatrice fournit $f(0,45) = -0,007\ldots$ et $f(0,455) = 0,008\ldots$ Donc, $f(0,45) < f(\alpha) < f(0,455)$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$, on en déduit que $0,45 < \alpha < 0,455$ et en particulier que

$$\boxed{\alpha = 0,45 \text{ arrondi au centième.}}$$

3) Soit a un réel de $[0,1]$.

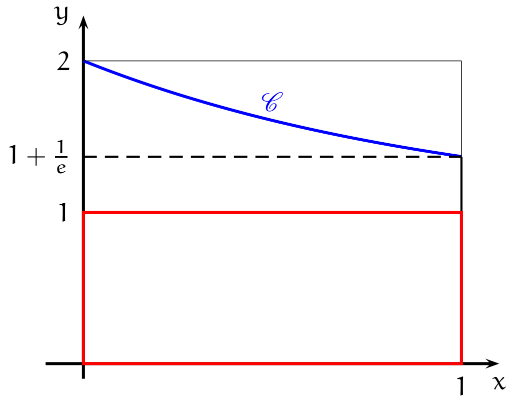
$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \Leftrightarrow a - e^{-a} + 1 = 1 - \frac{1}{e} - a + e^{-a} \Leftrightarrow 2a - 2e^{-a} + \frac{1}{e} = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow a = \alpha.$$

Le réel a pour lequel les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales est le réel $\alpha = 0,45$ arrondi au centième.

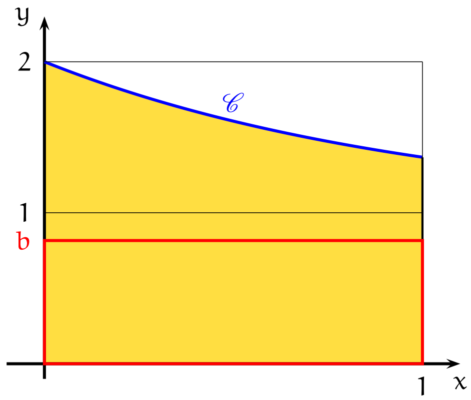
Partie B

1) Si on partage le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines d'aires égales, chacun de ces domaines a une aire égale à la moitié de l'aire de $\mathscr{D}$.

L'aire du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aires, est strictement inférieure à 2 car le domaine $\mathscr{D}$ est contenu dans le rectangle de sommets les points de coordonnées respectives $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ et $(0,2)$. Donc la moitié de l'aire de $\mathscr{D}$ est strictement inférieure à 1.
L'aire, exprimée en unités d'aires, du rectangle de sommets les points de coordonnées respectives $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ et $(0,1)$ est égale à 1. Cette aire est déjà strictement supérieure à la moitié de l'aire de $\mathscr{D}$. Donc, on a nécessairement $b < 1$ et en particulier $b < 1 + \dfrac{1}{e}$.



2) Puisque $b < 1 + \dfrac{1}{e}$, le domaine sous la droite d'équation $y = b$, d'aire égale à la moitié de l'aire de $\mathscr{D}$, est le rectangle de sommets les points de coordonnées repsectives $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,b)$ et $(0,b)$.
Notons $\mathscr{A}$ l'aire du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aires et $\mathscr{A}'$ l'aire du rectangle de sommets les points de coordonnées repsectives $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,b)$ et $(0,b)$.



D'une part,

$$\mathscr{A} = \int_0^1 \left(1 + e^{-x}\right) dx = \left[x - e^{-x}\right]_0^1 = \left(1 - e^{-1}\right) - \left(0 - e^0\right) = 2 - \frac{1}{e}.$$

D'autre part, l'aire $\mathscr{A}' = b \times 1 = b$. Ensuite,

$$\mathscr{A}' = \frac{\mathscr{A}}{2} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow b = 1 - \frac{1}{2e}.$$

$$\boxed{b = 1 - \frac{1}{2e} = 0,816\ldots}$$

EXERCICE 4

Partie A - Algorithmique et conjectures

1) Algorithme complété.

Variables :	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $1,5$
Traitement :	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur $\dfrac{nu-1}{2(n+1)}$ Affecter à n la valeur $n+1$ Fin de Tant que
Sortie :	Afficher la variable u

2) Algorithme complété et modifié.

Variables :	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $1,5$
Traitement :	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur $\dfrac{nu-1}{2(n+1)}$ Affecter à n la valeur $n+1$ Afficher la variable u Fin de Tant que

3) Il semble que la suite (u_n) soit strictement décroissante et converge vers 0.

Partie B - Étude mathématique

1) $v_1 = 1 \times u_1 - 1 = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$. Soit n un entier naturel non nul.

$$v_{n+1} = (n+1)u_{n+1} - 1 = (n+1)\frac{nu_n+1}{2(n+1)} - 1 = \frac{nu_n+1}{2} - 1 = \frac{nu_n+1-2}{2} = \frac{nu_n-1}{2}$$
$$= \frac{v_n}{2} = 0,5\,v_n.$$

On a montré que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = 0,5$.

2) On en déduit que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,5 \times (0,5)^{n-1} = (0,5)^n.$$

Ensuite, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$v_n = nu_n - 1 \Rightarrow nu_n = v_n + 1 \Rightarrow u_n = \frac{1+v_n}{n} \Rightarrow u_n = \frac{1+(0,5)^n}{n}.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ u_n = \frac{1+(0,5)^n}{n}.}$$

3) Puisque $-1 < 0,5 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,5)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+(0,5)^n) = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et en divisant, on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

4) Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1+(0,5)^{n+1}}{n+1} - \frac{1+(0,5)^n}{n} = \frac{n\left(1+(0,5)^{n+1}\right) - (n+1)\left(1+(0,5)^n\right)}{n(n+1)} \\
&= \frac{n + n\times 0,5\times(0,5)^n - n - n\times(0,5)^n - 1 - (0,5)^n}{n(n+1)} = \frac{-1-0,5n\,(0,5)^n - (0,5)^n}{n(n+1)} \\
&= \frac{-1-(1+0,5n)\,(0,5)^n}{n(n+1)} = -\frac{1+(1+0,5n)\,(0,5)^n}{n(n+1)}.
\end{aligned}$$

Pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{1+(1+0,5n)\,(0,5)^n}{n(n+1)} > 0$ et donc, pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} - u_n < 0$ ou encore pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} < u_n$.
On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Partie C - Retour à l'algorithmique

L'algorithme ci-dessous permet de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

Variables :	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $1,5$

Traitement :	Tant que $u \geqslant 0,001$
	    Affecter à u la valeur $\dfrac{nu-1}{2(n+1)}$
	    Affecter à n la valeur $n+1$
	Fin de Tant que

Sortie :	Afficher la variable n

