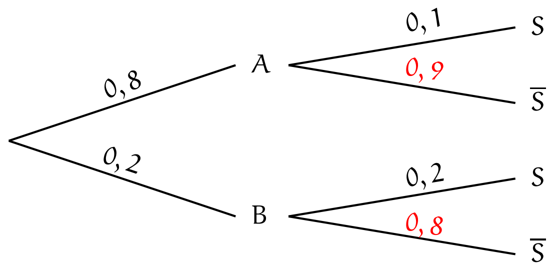
Asie 2013. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre.



2) a)

$$p\left(B \cap \overline{S}\right) = p(B) \times p_B\left(\overline{S}\right) = p(B) \times (1 - p_B(S)) = 0,2 \times (1 - 0,2) = 0,16.$$

$$\boxed{p\left(B \cap \overline{S}\right) = 0,16.}$$

b) La probabilité demandée est $p\left(\overline{S}\right)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p\left(\overline{S}\right) = p\left(A \cap \overline{S}\right) + p\left(B \cap \overline{S}\right) = p(A) \times p_A\left(\overline{S}\right) + p(B) \times p_B\left(\overline{S}\right) = 0,8 \times (1 - 0,1) + 0,2 \times (1 - 0,2) = 0,88.$$

$$\boxed{p\left(\overline{S}\right) = 0,88.}$$

3) La probabilité demandée est $p_S(B)$. D'après les deux questions précédentes $P(S) = 1 - P\left(\overline{S}\right) = 1 - 0,88 = 0,12$ et $P(B \cap S) = P(B) - P\left(B \cap \overline{S}\right) = 0,2 - 0,16 = 0,04$. Donc

$$p_S(B) = \frac{p(B \cap S)}{p(S)} = \frac{0,04}{0,12} = \frac{1}{3} = 0,33 \text{ arrondi au centième.}$$

$$\boxed{p_S(B) = \frac{1}{3} = 0,33 \text{ arrondi au centième.}}$$

Partie B

1) X suit une loi binomiale. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « la boîte est sans trace de pesticide » avec une probabilité $p = P\left(\overline{S}\right) = 0,88$ d'après la question 2)b) de la partie A et « la boîte a des traces de pesticide » avec une probabilité $1 - p = 0,12$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$.

2) La probabilité demandée est $P(X = 10)$.

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,88^{10} \times 0,12^0 = 0,88^{10} = 0,28 \text{ arrondi au centième.}$$

3) La probabilité demandée est $P(X \geqslant 8)$. La calculatrice fournit

$$P(X \geqslant 8) = 0,89 \text{ arrondi au centième.}$$

Partie C

1) L'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95% est

$$\left[0,88-1,96\frac{\sqrt{0,88\times(1-0,88)}}{\sqrt{50}},0,88+1,96\frac{\sqrt{0,88\times(1-0,88)}}{\sqrt{50}}\right]=[0,78;0,98],$$

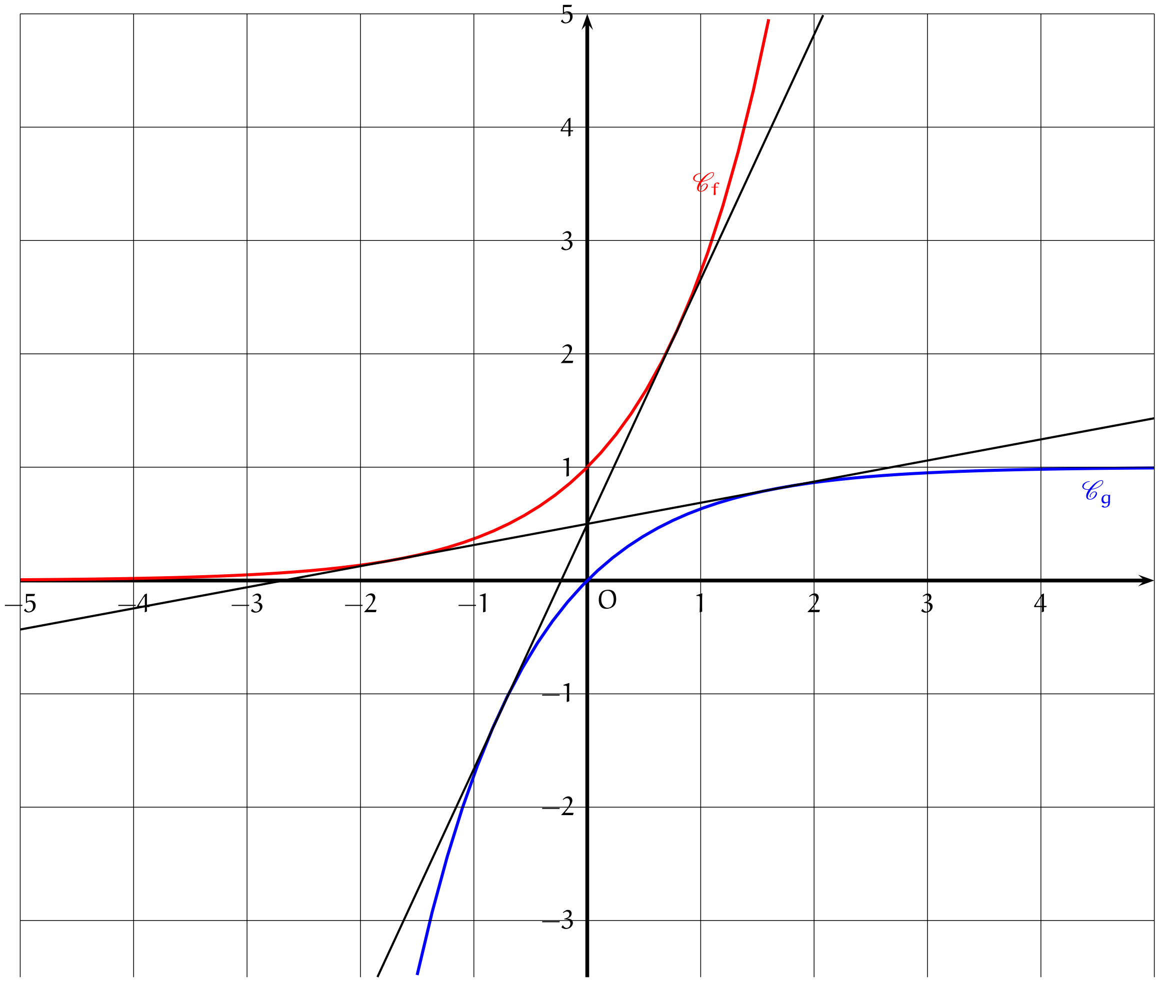
en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

2) On note tout d'abord que $n \geqslant 30$ puis que $np = 50\times 0,88 = 44$ et $n(1-p) = 50\times 0,12 = 6$ et donc que $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

La fréquence de boites sans trace de pesticides est $f = \dfrac{50-12}{50} = \dfrac{76}{100} = 0,76$. Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation déterminé en 1). Donc, l'inspecteur de la brigade de répression peut décider, au seuil de 95%, que la publicité est mensongère.

EXERCICE 2

Partie A



Partie B

1) a) Soit a un réel. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est $f'(a)$ ou encore e^a.

b) Soit b un réel. Pour tout réel x, $g'(x) = e^{-x}$. Donc, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse b est $g'(b)$ ou encore e^{-b}.

c) Soient a et b deux réels. Si la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est aussi la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse b, alors ces deux tangentes ont en particulier même coefficient directeur. On en déduit que $e^a = e^{-b}$ puis que $a = -b$ ou enfin que $b = -a$.

2) Soit a un réel. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ ou encore $y = e^a(x - a) + e^a$ ou enfin

$$y = e^a x - ae^a + e^a.$$

Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $-a$ est $y = g'(-a)(x+a)+g(-a)$ ou encore $y = e^a(x+a)+1-e^a$ ou enfin

$$y = e^a x + ae^a + 1 - e^a.$$

Si ces deux droites sont confondues, alors leurs ordonnées à l'origine sont égales. Par suite, $-ae^a + e^a = ae^a + 1 - e^a$ ou encore $2ae^a - 2e^a + 1 = 0$ ou enfin $2(a - 1)e^a + 1 = 0$.

On a montré que le réel a est solution de l'équation $2(x - 1)e^x + 1 = 0$.

Partie C

1) a) Limite de φ en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2(x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} 2(x-1)e^x = +\infty$ puis

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.}$$

Limite de φ en $-\infty$. Pour tout réel x, $\varphi(x) = 2xe^x - 2e^x + 1$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et d'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 2\times 0 - 2\times 0 + 1 = 1$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 1.}$$

b) La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\varphi'(x) = 2\left(1\times e^x + (x-1)\times e^x\right) + 0 = 2(1+x-1)e^x = 2xe^x.$$

Pour tout réel x, $e^x > 0$ et d'autre part, $2 > 0$. Donc, pour tout réel x, $\varphi'(x)$ est du signe de x. On en déduit que la fonction φ' est strictement négative sur $]-\infty, 0[$, strictement positive sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0.

c) $\varphi(0) = 2(0-1)e^0 + 1 = -2+1 = -1$.
On en déduit le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) • La fonction φ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $\left[\varphi(0), \lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)\right[= [-1, 1[$, l'équation $\varphi(x) = k$ admet une solution et une seule dans $]-\infty, 0]$. Comme le nombre 0 appartient à l'intervalle $[-1, 1[$, on a montré que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $]-\infty, 0]$. On note α cette solution. Comme $\varphi(0) \neq 0$, on a $\alpha \neq 0$ et donc $\alpha < 0$.

• De même, la fonction φ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Donc, pour tout réel k de l'intervalle $\left[\varphi(0), \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)\right[= [-1, +\infty[$, l'équation $\varphi(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. Comme le nombre 0 appartient à l'intervalle $[-1, +\infty[$, on a montré que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, +\infty[$. On note β cette solution. Comme $\varphi(0) \neq 0$, on a $\beta \neq 0$ et donc $\beta > 0$.

On a montré que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$, l'une strictement négative et l'autre strictement positive.

b) La calculatrice fournit $\varphi(-1,68) = 0,001\ldots$ et $\varphi(-1,675) = -0,002\ldots$. Donc $\varphi(-1,68) > 0$ et $\varphi(-1,675) < 0$ ou encore $\varphi(-1,675) < \varphi(\alpha) < \varphi(-1,68)$. Puisque la fonction φ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, on en déduit que $-1,68 < \alpha < -1,675$. En particulier,

$$\boxed{\alpha = -1,68 \text{ arrondi au centième.}}$$

La calculatrice fournit $\varphi(0,765) = -0,01\ldots$ et $\varphi(0,77) = 0,006\ldots$. Donc $\varphi(0,765) < \varphi(\beta) < \varphi(0,77)$. Puisque la fonction φ est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$, on en déduit que $0,765 < \alpha < 0,77$. En particulier,

$$\boxed{\beta = 0,77 \text{ arrondi au centième.}}$$

Partie D

a désigne l'un des deux réels α ou β. En particulier, le réel a n'est pas nul.
Le point E a pour coordonnées (a, e^a) et le point F a pour coordonnées $(-a, 1-e^a)$.
Le coefficient directeur de la droite (EF) est

$$\frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{1 - e^a - e^a}{-a - a} = \frac{2e^a - 1}{2a}.$$

Puisque $\varphi(a) = 0$, on a $2(a-1)e^a + 1 = 0$ et donc $2ae^a - 2e^a + 1 = 0$ ou encore $2e^a - 1 = 2ae^a$. Par suite, $\dfrac{2e^a - 1}{2a} = \dfrac{2ae^a}{2a} = e^a$.

Une équation de la droite (EF) est donc $y = e^a(x - x_E) + y_E$ ou encore $y = e^a(x - a) + e^a$ ou enfin $y = e^a x - ae^a + e^a$.

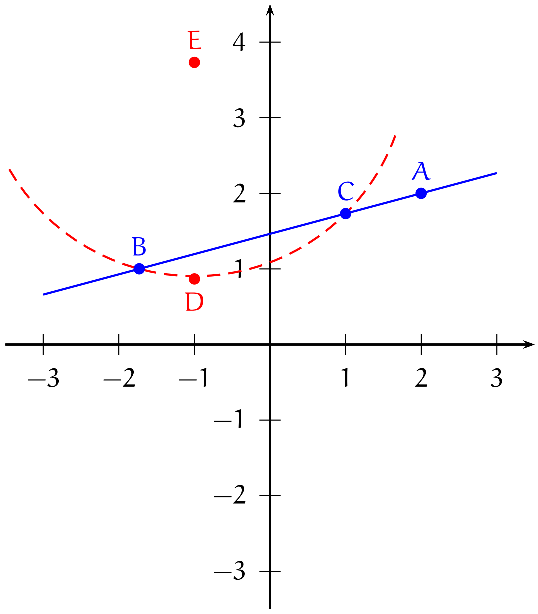
1) D'après la question 2) de la partie B, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point E a aussi pour équation cartésienne $y = e^a x - ae^a + e^a$. Donc, la droite (EF) est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point E.

2) D'après les calculs effectués à la fin de la partie B, l'égalité $\varphi(a) = 0$ est équivalente à l'égalité $-ae^a + e^a = ae^a + 1 - e^a$. Donc, une équation cartésienne de la droite (EF) est aussi $y = e^a x + ae^a + 1 - e^a$.

Ceci montre que la droite (EF) est la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point F.

EXERCICE 3

1)	**VRAI**
2)	**FAUX**
3)	**VRAI**
4)	**VRAI**



1) Les coordonnées des points A, B et C sont respectivement $(2,2)$, $\left(-\sqrt{3},1\right)$ et $\left(1,\sqrt{3}\right)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\left(-\sqrt{3}-2,-1\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $\left(-1,\sqrt{3}-2\right)$.

$$\begin{vmatrix} -\sqrt{3}-2 & -1 \\ -1 & \sqrt{3}-2 \end{vmatrix} = \left(-\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)-1 = (-2)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2-1 = 4-3-1 = 0.$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et donc que les points A, B et C sont alignés. L'affirmation 1 est vraie.

2)

$$\begin{aligned} BE &= |z_E - z_B| = \left|-1+\left(2+\sqrt{3}\right)i+\sqrt{3}-i\right| = \left|\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{3-2\sqrt{3}+1+3+2\sqrt{3}+1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2,82\ldots. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CE &= |z_E - z_C| = \left|-1+\left(2+\sqrt{3}\right)i-1-i\sqrt{3}\right| = |-2+2i| = \sqrt{(-2)^2+2^2} \\ &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

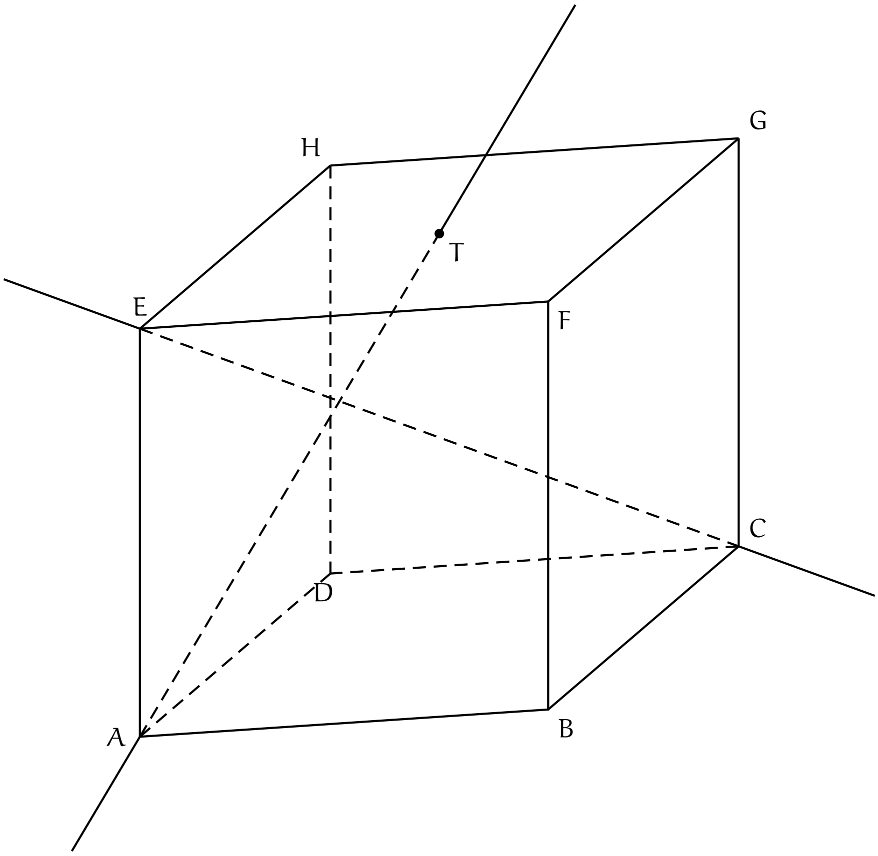
$$\begin{aligned} DE &= |z_E - z_D| = \left|-1+\left(2+\sqrt{3}\right)i+1-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\right| = \left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)|i| \\ &= 2+\frac{\sqrt{3}}{2} = 2,86\ldots. \end{aligned}$$

Donc, $DE \neq BE$. L'affirmation 2 est fausse

3) Une équation cartésienne du plan (IJK) est bien sûr $x + y + z = 1$.
Soit $M(2 - t, 6 - 2t, -2 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$M \in (IJK) \Leftrightarrow 2 - t + 6 - 2t - 2 + t = 1 \Leftrightarrow -2t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}.$$

Pout $t = \frac{5}{2}$, on obtient le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire le point E. L'affirmation 3 est vraie.



4) On se place dans le repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Le point H a pour coordonnées $(0, 1, 1)$ et le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. Le point T a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ puis le vecteur $\overrightarrow{AT}$ a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

D'autre part, le point E a pour coordonnées $(0, 0, 1)$ et le point C a pour coordonnées $(1, 1, 0)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $(1, 1, -1)$.

$$\overrightarrow{AT}.\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times (-1) = 0.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont orthogonaux ou encore les droites (AT) et (EC) sont orthogonales. L'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 4

Partie A

1) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

- $u_0 = 2$ et $2 > 1$. Donc, l'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n > 1$ et montrons que $u_{n+1} > 1$.

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1+3u_n}{3+u_n} - 1 = \frac{1+3u_n-3-u_n}{3+u_n} = \frac{2u_n-2}{3+u_n} = \frac{2(u_n-1)}{3+u_n}.$$

Par hypothèse de récurrence, $u_n > 1$ et donc $u_n - 1 > 0$ et $3 + u_n > 0$ puis $\dfrac{2(u_n-1)}{3+u_n} > 0$. On en déduit que $u_{n+1} - 1 > 0$ ou encore que $u_{n+1} > 1$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

2) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \frac{1+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n} = \frac{1-u_n^2}{3+u_n} \\ &= \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}. \end{aligned}$$

b) Soit n un entier naturel. D'après la question 1), on a $u_n > 1$. On en déduit que $1-u_n < 0$. D'autre part, $1+u_n > 0$ et $3 + u_n > 0$. Donc, $\dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n} < 0$ puis $u_{n+1} - u_n < 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$ ou encore, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$. On a montré que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1. On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge.}}$$

Partie B

1)

i	1	2	3
u	0,8	1,077	0,976

2) Il semblerait que la suite (u_n) converge vers 1.

3) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} - 1}{\dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} + 1} = \frac{\left(\dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} - 1\right)(0,5+u_n)}{\left(\dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} + 1\right)(0,5+u_n)} = \frac{1+0,5u_n-0,5-u_n}{1+0,5u_n+0,5+u_n} = \frac{0,5-0,5u_n}{1,5+1,5u_n} \\ &= \frac{-0,5}{1,5} \times \frac{u_n-1}{u_n+1} = -\frac{0,5\times 2}{1,5\times 2} \times \frac{u_n-1}{u_n+1} = -\frac{1}{3}v_n. \end{aligned}$$

Donc, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{3}$.

b) $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+1} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$. Soit n un entier naturel.

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

4) a) Soit n un entier naturel.

$$|v_n| = \frac{1}{3} \times \left(\left|-\frac{1}{3}\right|\right)^n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

On en déduit que $|v_n| \leqslant \frac{1}{3} \times 1$ ou encore $|v_n| \leqslant \frac{1}{3}$. En particulier, $v_n \neq 1$.

b) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} &\Rightarrow v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \Rightarrow v_n + u_n v_n = u_n - 1 \Rightarrow v_n + 1 = u_n - u_n v_n \\ &\Rightarrow u_n(1 - v_n) = 1 + v_n \Rightarrow u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}. \end{aligned}$$

c) On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = \frac{1 + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n}.}$$

Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1 + \frac{1}{3} \times 0}{1 - \frac{1}{3} \times 0} = 1$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.}$$