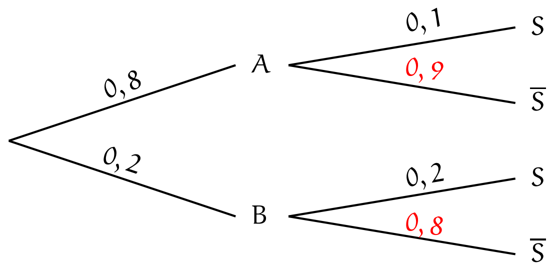
Asie 2013. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre.



2) a)

$$p\left(B\cap\overline{S}\right)=p(B)\times p_B\left(\overline{S}\right)=p(B)\times(1-p_B(S))=0,2\times(1-0,2)=0,16.$$

$$\boxed{p\left(B\cap\overline{S}\right)=0,16.}$$

b) La probabilité demandée est $p\left(\overline{S}\right)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p\left(\overline{S}\right)=p\left(A\cap\overline{S}\right)+p\left(B\cap\overline{S}\right)=p(A)\times p_A\left(\overline{S}\right)+p(B)\times p_B\left(\overline{S}\right)=0,8\times(1-0,1)+0,2\times(1-0,2)=0,88.$$

$$\boxed{p\left(\overline{S}\right)=0,88.}$$

3) La probabilité demandée est $p_S(B)$. D'après les deux questions précédentes $P(S)=1-P\left(\overline{S}\right)=1-0,88=0,12$ et $P(B\cap S)=P(B)-P\left(B\cap\overline{S}\right)=0,2-0,16=0,04$. Donc

$$p_S(B)=\frac{p\,(B\cap S)}{p\,(S)}=\frac{0,04}{0,12}=\frac{1}{3}=0,33 \text{ arrondi au centième.}$$

$$\boxed{p_S(B)=\frac{1}{3}=0,33 \text{ arrondi au centième.}}$$

Partie B

1) X suit une loi binomiale. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « la boîte est sans trace de pesticide » avec une probabilité $p=P\left(\overline{S}\right)=0,88$ d'après la question 2)b) de la partie A et « la boîte a des traces de pesticide » avec une probabilité $1-p=0,12$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,88$.

2) La probabilité demandée est $P(X=10)$.

$$P(X=10)=\binom{10}{10}\times 0,88^{10}\times 0,12^{0}=0,88^{10}=0,28 \text{ arrondi au centième.}$$

3) La probabilité demandée est $P\,(X\geqslant 8)$. La calculatrice fournit

$$P(X\geqslant 8)=0,89 \text{ arrondi au centième.}$$

Partie C

1) L'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95% est

$$\left[0,88-1,96\frac{\sqrt{0,88\times(1-0,88)}}{\sqrt{50}},0,88+1,96\frac{\sqrt{0,88\times(1-0,88)}}{\sqrt{50}}\right]=[0,78;0,98],$$

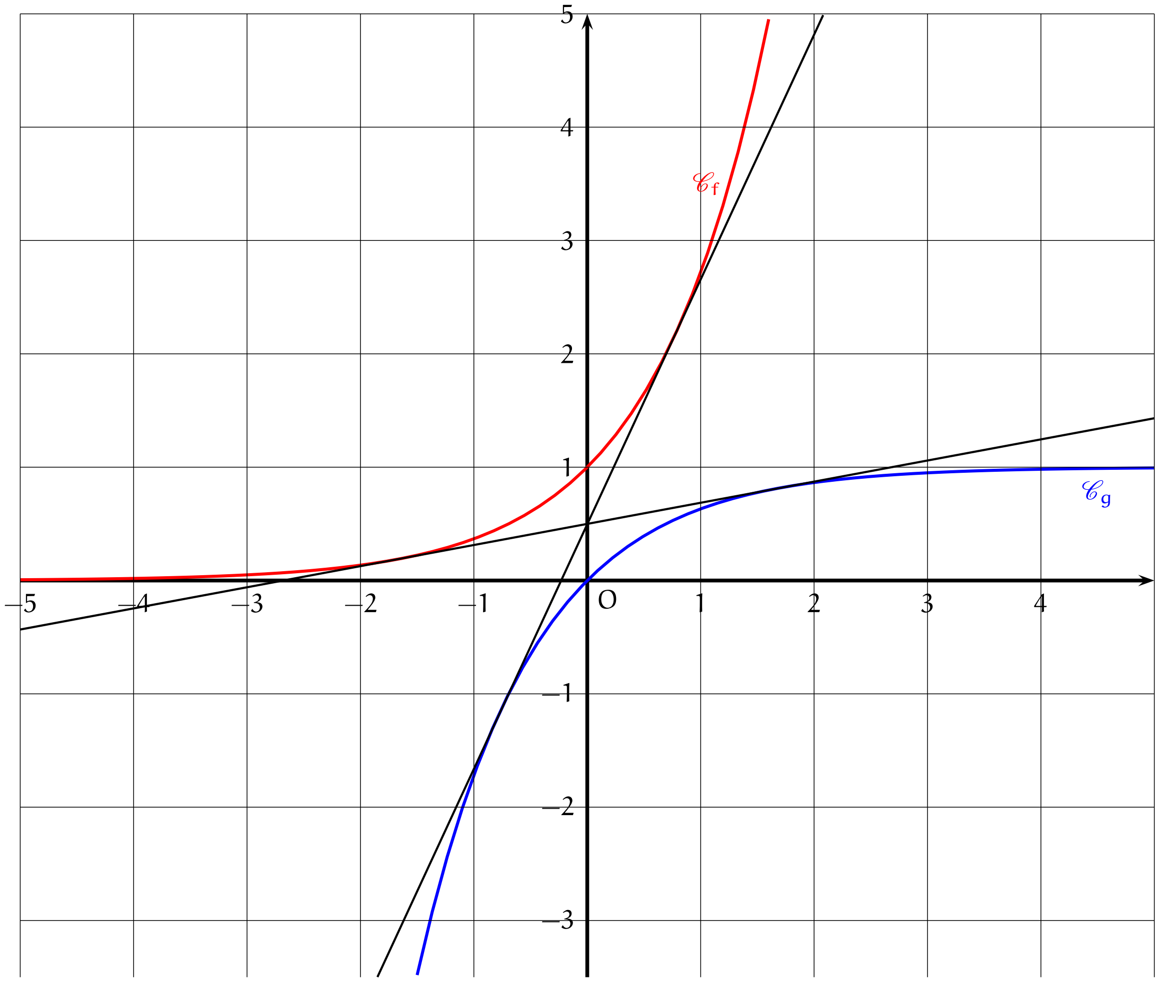
en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

2) On note tout d'abord que $n\geqslant 30$ puis que $np=50\times 0,88=44$ et $n(1-p)=50\times 0,12=6$ et donc que $np\geqslant 5$ et $n(1-p)\geqslant 5$.

La fréquence de boites sans trace de pesticides est $f=\dfrac{50-12}{50}=\dfrac{76}{100}=0,76$. Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation déterminé en 1). Donc, l'inspecteur de la brigade de répression peut décider, au seuil de 95%, que la publicité est mensongère.

EXERCICE 2

Partie A



Partie B

1) a) Soit a un réel. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est $f'(a)$ ou encore e^a.

b) Soit b un réel. Pour tout réel x, $g'(x) = e^{-x}$. Donc, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse b est $g'(b)$ ou encore e^{-b}.

c) Soient a et b deux réels. Si la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est aussi la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse b, alors ces deux tangentes ont en particulier même coefficient directeur. On en déduit que $e^a = e^{-b}$ puis que $a = -b$ ou enfin que $b = -a$.

2) Soit a un réel. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ ou encore $y = e^a(x - a) + e^a$ ou enfin

$$y = e^a x - ae^a + e^a.$$

Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $-a$ est $y = g'(-a)(x+a)+g(-a)$ ou encore $y = e^a(x+a)+1-e^a$ ou enfin

$$y = e^a x + ae^a + 1 - e^a.$$

Si ces deux droites sont confondues, alors leurs ordonnées à l'origine sont égales. Par suite, $-ae^a + e^a = ae^a + 1 - e^a$ ou encore $2ae^a - 2e^a + 1 = 0$ ou enfin $2(a - 1)e^a + 1 = 0$.

On a montré que le réel a est solution de l'équation $2(x - 1)e^x + 1 = 0$.

Partie C

1) a) Limite de φ en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2(x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} 2(x-1)e^x = +\infty$ puis

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.}$$

Limite de φ en $-\infty$. Pour tout réel x, $\varphi(x) = 2xe^x - 2e^x + 1$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et d'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 2\times 0 - 2\times 0 + 1 = 1$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 1.}$$

b) La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\varphi'(x) = 2\left(1\times e^x + (x-1)\times e^x\right) + 0 = 2(1+x-1)e^x = 2xe^x.$$

Pour tout réel x, $e^x > 0$ et d'autre part, $2 > 0$. Donc, pour tout réel x, $\varphi'(x)$ est du signe de x. On en déduit que la fonction φ' est strictement négative sur $]-\infty, 0[$, strictement positive sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0.

c) $\varphi(0) = 2(0-1)e^0 + 1 = -2 + 1 = -1$.
On en déduit le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) • La fonction φ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $\left[\varphi(0), \lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)\right[= [-1, 1[$, l'équation $\varphi(x) = k$ admet une solution et une seule dans $]-\infty, 0]$. Comme le nombre 0 appartient à l'intervalle $[-1, 1[$, on a montré que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $]-\infty, 0]$. On note α cette solution. Comme $\varphi(0) \neq 0$, on a $\alpha \neq 0$ et donc $\alpha < 0$.

• De même, la fonction φ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Donc, pour tout réel k de l'intervalle $\left[\varphi(0), \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)\right[= [-1, +\infty[$, l'équation $\varphi(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. Comme le nombre 0 appartient à l'intervalle $[-1, +\infty[$, on a montré que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, +\infty[$. On note β cette solution. Comme $\varphi(0) \neq 0$, on a $\beta \neq 0$ et donc $\beta > 0$.

On a montré que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$, l'une strictement négative et l'autre strictement positive.

b) La calculatrice fournit $\varphi(-1,68) = 0,001\ldots$ et $\varphi(-1,675) = -0,002\ldots$. Donc $\varphi(-1,68) > 0$ et $\varphi(-1,675) < 0$ ou encore $\varphi(-1,675) < \varphi(\alpha) < \varphi(-1,68)$. Puisque la fonction φ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, on en déduit que $-1,68 < \alpha < -1,675$. En particulier,

$$\boxed{\alpha = -1,68 \text{ arrondi au centième.}}$$

La calculatrice fournit $\varphi(0,765) = -0,01\ldots$ et $\varphi(0,77) = 0,006\ldots$. Donc $\varphi(0,765) < \varphi(\beta) < \varphi(0,77)$. Puisque la fonction φ est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$, on en déduit que $0,765 < \alpha < 0,77$. En particulier,

$$\boxed{\beta = 0,77 \text{ arrondi au centième.}}$$

Partie D

a désigne l'un des deux réels α ou β. En particulier, le réel a n'est pas nul.
Le point E a pour coordonnées (a, e^a) et le point F a pour coordonnées $(-a, 1-e^a)$.
Le coefficient directeur de la droite (EF) est

$$\frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{1 - e^a - e^a}{-a - a} = \frac{2e^a - 1}{2a}.$$

Puisque $\varphi(a) = 0$, on a $2(a-1)e^a + 1 = 0$ et donc $2ae^a - 2e^a + 1 = 0$ ou encore $2e^a - 1 = 2ae^a$. Par suite, $\frac{2e^a - 1}{2a} = \frac{2ae^a}{2a} = e^a$.

Une équation de la droite (EF) est donc $y = e^a(x - x_E) + y_E$ ou encore $y = e^a(x-a) + e^a$ ou enfin $y = e^a x - ae^a + e^a$.

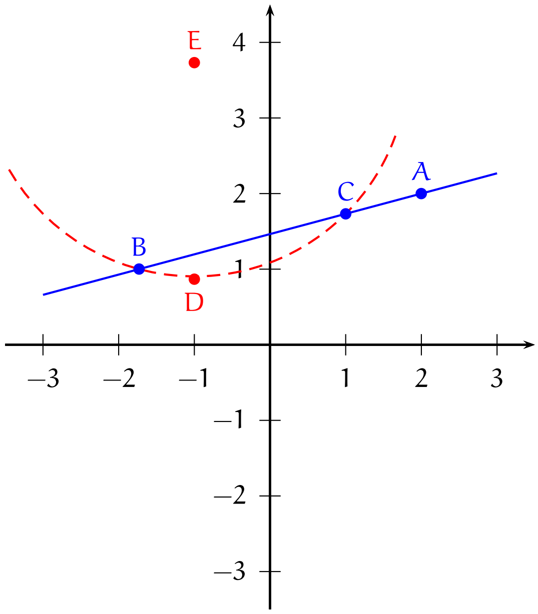
1) D'après la question 2) de la partie B, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point E a aussi pour équation cartésienne $y = e^a x - ae^a + e^a$. Donc, la droite (EF) est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point E.

2) D'après les calculs effectués à la fin de la partie B, l'égalité $\varphi(a) = 0$ est équivalente à l'égalité $-ae^a + e^a = ae^a + 1 - e^a$. Donc, une équation cartésienne de la droite (EF) est aussi $y = e^a x + ae^a + 1 - e^a$.

Ceci montre que la droite (EF) est la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point F.

EXERCICE 3

1)	**VRAI**
2)	**FAUX**
3)	**VRAI**
4)	**VRAI**



1) Les coordonnées des points A, B et C sont respectivement $(2,2)$, $\left(-\sqrt{3},1\right)$ et $\left(1,\sqrt{3}\right)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\left(-\sqrt{3}-2,-1\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $\left(-1,\sqrt{3}-2\right)$.

$$\begin{vmatrix} -\sqrt{3}-2 & -1 \\ -1 & \sqrt{3}-2 \end{vmatrix} = \left(-\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)-1=(-2)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2-1=4-3-1=0.$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et donc que les points A, B et C sont alignés. L'affirmation 1 est vraie.

2)

$$\begin{aligned} BE &= |z_E-z_B| = \left|-1+\left(2+\sqrt{3}\right)i+\sqrt{3}-i\right| = \left|\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{3-2\sqrt{3}+1+3+2\sqrt{3}+1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2,82\ldots. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CE &= |z_E-z_C| = \left|-1+\left(2+\sqrt{3}\right)i-1-i\sqrt{3}\right| = |-2+2i| = \sqrt{(-2)^2+2^2} \\ &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

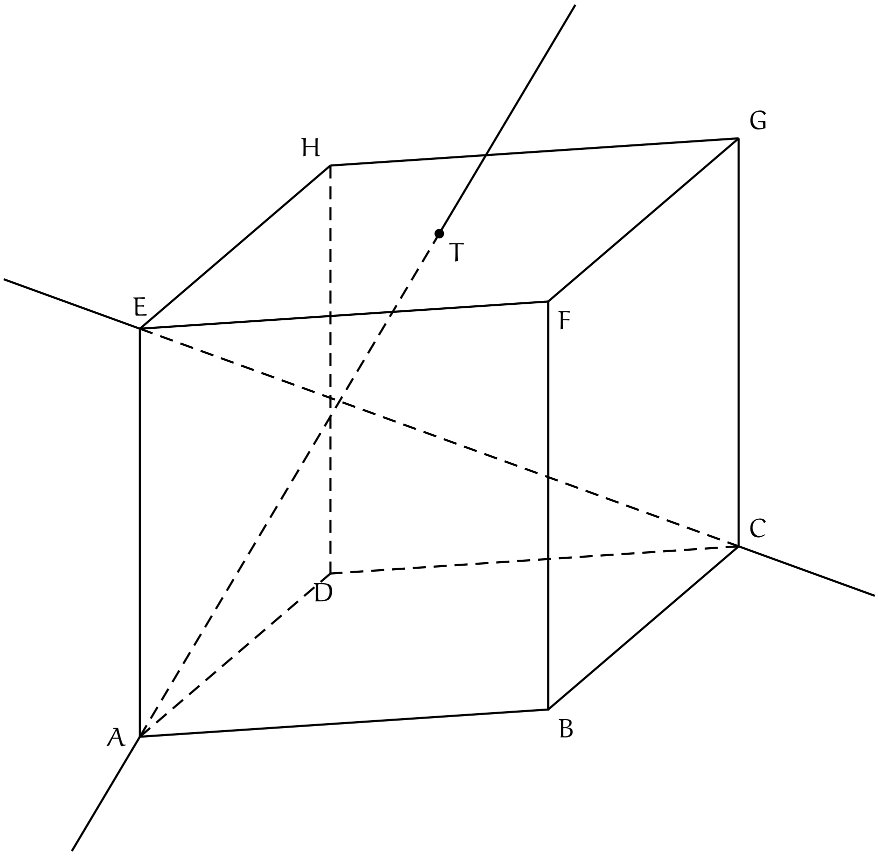
$$\begin{aligned} DE &= |z_E-z_D| = \left|-1+\left(2+\sqrt{3}\right)i+1-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\right| = \left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)|i| \\ &= 2+\frac{\sqrt{3}}{2} = 2,86\ldots. \end{aligned}$$

Donc, $DE \neq BE$. L'affirmation 2 est fausse

3) Une équation cartésienne du plan (IJK) est bien sûr $x + y + z = 1$.
Soit $M(2 - t, 6 - 2t, -2 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$M \in (IJK) \Leftrightarrow 2 - t + 6 - 2t - 2 + t = 1 \Leftrightarrow -2t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}.$$

Pout $t = \frac{5}{2}$, on obtient le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire le point E. L'affirmation 3 est vraie.



4) On se place dans le repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Le point H a pour coordonnées $(0, 1, 1)$ et le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. Le point T a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ puis le vecteur $\overrightarrow{AT}$ a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

D'autre part, le point E a pour coordonnées $(0, 0, 1)$ et le point C a pour coordonnées $(1, 1, 0)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $(1, 1, -1)$.

$$\overrightarrow{AT}.\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times (-1) = 0.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont orthogonaux ou encore les droites (AT) et (EC) sont orthogonales. L'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 4

Partie A

1) a) • $\left\{\begin{array}{l} x_{E'} = \dfrac{5}{4}x_E + \dfrac{3}{4}y_E = \dfrac{5}{4}\times 2 + \dfrac{3}{4}\times 2 = 4 \\ y_{E'} = \dfrac{3}{4}x_E + \dfrac{5}{4}y_E = \dfrac{3}{4}\times 2 + \dfrac{5}{4}\times 2 = 4 \end{array}\right.$. Donc les coordonnées de E' sont $(4, 4)$.

• $\left\{\begin{array}{l} x_{F'} = \dfrac{5}{4}x_F + \dfrac{3}{4}y_F = \dfrac{5}{4}\times(-1) + \dfrac{3}{4}\times 5 = \dfrac{5}{2} \\ y_{F'} = \dfrac{3}{4}x_F + \dfrac{5}{4}y_F = \dfrac{3}{4}\times(-1) + \dfrac{5}{4}\times 5 = \dfrac{11}{2} \end{array}\right.$. Donc les coordonnées de F' sont $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{11}{2}\right)$.

• $\left\{\begin{array}{l} x_{G'} = \dfrac{5}{4}x_G + \dfrac{3}{4}y_G = \dfrac{5}{4}\times(-3) + \dfrac{3}{4}\times 3 = -\dfrac{3}{2} \\ y_{G'} = \dfrac{3}{4}x_G + \dfrac{5}{4}y_G = \dfrac{3}{4}\times(-3) + \dfrac{5}{4}\times 3 = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$. Donc les coordonnées de G' sont $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

b) $OE = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{2\times 2^2} = 2\sqrt{2}$ et $OE' = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{2\times 4^2} = 4\sqrt{2}$. Donc $OE' = 2OE$.

$OG = \sqrt{(-3)^2+3^2} = \sqrt{2\times 3^2} = 3\sqrt{2}$ et $OG' = \sqrt{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{2\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Donc $OG' = \dfrac{OG}{2}$.

2) Pour tous réels x et y,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{4}y \\ \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{4} & \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{3}{4} & \dfrac{5}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Donc $A = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{4} & \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{3}{4} & \dfrac{5}{4} \end{pmatrix}$.

Partie B

1) Algorithme modifié.

Entrée :	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation :	Affecter à x la valeur -1 Affecter à y la valeur 5

Traitement :	Entrer la valeur de N
	POUR i allant de 1 à N
	    Affecter à a la valeur $\dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{4}y$
	    Affecter à b la valeur $\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}y$
	    Affecter à x la valeur a
	    Affecter à y la valeur b
	
	    Afficher x
	    Afficher y
	Fin POUR

2) Il semblerait que les deux suites de coordonnées des images successives du point F tendent vers $+\infty$.

Partie C

1) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\alpha_n = 2^{n-1} + \dfrac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

- D'après la question 2) de la partie A, on a $A = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{4} & \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{3}{4} & \dfrac{5}{4} \end{pmatrix}$ ou encore $\alpha_1 = \dfrac{5}{4}$ et $\beta_1 = \dfrac{3}{4}$.

Donc, $2^{1-1}+\dfrac{1}{2^{1+1}}=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}=\alpha_1$ et $2^{1-1}-\dfrac{1}{2^{1+1}}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}=\beta_1$. Les égalités à démontrer sont vraies quand $n=1$.

• Soit $n\geqslant 1$. Supposons que $\alpha_n=2^{n-1}+\dfrac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n=2^{n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}}$ et montrons que $\alpha_{n+1}=2^n+\dfrac{1}{2^{n+2}}$ et $\beta_{n+1}=2^n-\dfrac{1}{2^{n+2}}$.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\alpha_{n+1} & \beta_{n+1}\\ \beta_{n+1} & \alpha_{n+1}\end{pmatrix} &= A^{n+1}=A\times A^n=\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_n & \beta_n\\ \beta_n & \alpha_n\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{5}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{n-1}+\frac{1}{2^{n+1}} & 2^{n-1}-\frac{1}{2^{n+1}}\\ 2^{n-1}-\frac{1}{2^{n+1}} & 2^{n-1}+\frac{1}{2^{n+1}}\end{pmatrix}\ \text{(par hypothèse de récurrence)}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \frac{5}{4}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\frac{3}{4}\left(2^{n-1}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)\times 2^{n-1}+\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{2^{n+1}}\\ &= 2\times 2^{n-1}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n+1}}=2^n+\frac{1}{2^{n+2}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\beta_{n+1} &= \frac{3}{4}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\frac{5}{4}\left(2^{n-1}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)\times 2^{n-1}+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\right)\times\frac{1}{2^{n+1}}\\ &= 2\times 2^{n-1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n+1}}=2^n-\frac{1}{2^{n+2}}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a $\alpha_n=2^{n-1}+\dfrac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n=2^{n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}}$.

2) a) Soit n un entier naturel non nul. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix} &= A^n\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1}+\frac{1}{2^{n+1}} & 2^{n-1}-\frac{1}{2^{n+1}}\\ 2^{n-1}-\frac{1}{2^{n+1}} & 2^{n-1}+\frac{1}{2^{n+1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)+2\left(2^{n-1}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\\ 2\left(2^{n-1}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+2\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2^n+2^n\\ 2^n+2^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}\\ 2^{n+1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ainsi, l'abscisse et l'ordonnée de E_n sont égales à 2^{n+1}, ce qui reste vrai quand $n=0$. En particulier, pour tout entier naturel n, le point E_n est sur la droite d'équation $y=x$.

b) Soit n un entier naturel.

$$OE_n=\sqrt{x_n^2+y_n^2}=\sqrt{2\times x_n^2}=x_n\sqrt{2}=2^{n+1}\sqrt{2}=2\sqrt{2}\times 2^n.$$

Puisque $2>1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$. En multipliant par $2\sqrt{2}$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}OE_n=+\infty$.