Antilles Guyane 2013. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

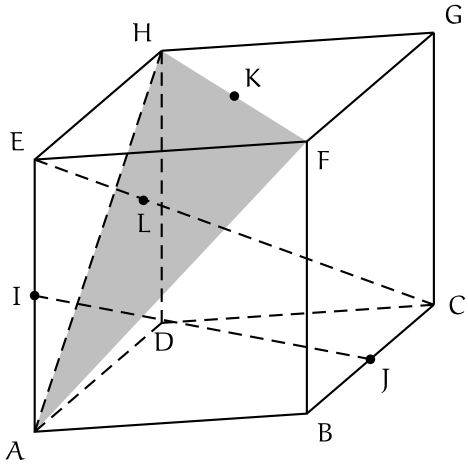
1) réponse b)

2) réponse c)

3) réponse d)

4) réponse b)

5) réponse d)



Explication 1. Si les droites (EC) et (IJ) sont coplanaires, le point J appartient au plan (ECI) qui est aussi le plan (ECA). Ceci est faux et donc les droites (EC) et (IJ) ne sont pas coplanaires. La bonne réponse est la réponse b).

Explication 2. Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées respectives des points A, F, B et G sont $(0,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,0,0)$ et $(1,1,1)$.
Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BG}$ ont pour coordonnées respectives $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$. On en déduit que

$$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BG} = 1\times 0 + 0\times 1 + 1\times 1 = 1.$$

La bonne réponse est la réponse c).

Explication 3. Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées respectives des points A, F et H sont $(0,0,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$.

Puisque $x_A + y_A + z_A - 1 = -1 \neq 0$, le point A n'appartient pas au plan de la proposition a).
Par contre, le point A appartient aux plans des propositions b), c) et d).

$x_F - y_F + z_F = 2 \neq 0$. Donc le point F n'appartient pas au plan de la proposition b).
$-x_H + y_H + z_H = 2 \neq 0$. Donc le point H n'appartient pas au plan de la proposition c).
La bonne réponse est donc nécessairement la réponse d). Notons que $x_A + y_A - z_A = x_F + y_F - z_F = x_G + y_G - z_G = 0$ et donc une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est effectivement $x + y - z = 0$.

Explication 4. Puisqu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $x + y - z = 0$, un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1,1,-1)$.
Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $(1,1,-1)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{EC}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. Comme le vecteur $\overrightarrow{EL}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{EC}$, le vecteur $\overrightarrow{EL}$ est aussi un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. La bonne réponse est la réponse b).

Explication 5. Une représentation paramétrique de la droite (EC) est $\left\{\begin{array}{l} x = t\\ y = t\\ z = 1 - t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. Soit donc $M(t,t,1-t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (EC).

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow t + t - (1 - t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Quan $t = \frac{1}{3}$, on obtient les coordonnées du point L : $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Ceci peut encore s'écrire $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.
La bonne réponse est la réponse d).

EXERCICE 2

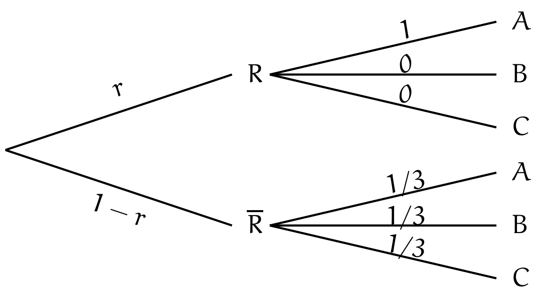
Partie A

$$\begin{aligned} f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] &\Leftrightarrow p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f \text{ et } f \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow p \leqslant f + \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et } f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \Leftrightarrow f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant f + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, les événements $f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et $p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ se produisent simultanément. Ils ont donc la même probabilité et en particulier, pour n grand, l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à $0,95$.

Partie B

1) a) Représentons le situation par un arbre de probabilités.



b) D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(A) &= P(R \cap A) + P\left(\overline{R} \cap A\right) = P(R) \times P_R(A) + P\left(\overline{R}\right) \times P_{\overline{R}}(A) \\ &= r \times 1 + (1 - r) \times \frac{1}{3} = \frac{3r + 1 - r}{3} = \frac{1}{3}(1 + 2r). \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{3}(1 + 2r).}$$

c) La probabilité demandée est $P_A(R)$.

$$P_A(R) = \frac{P(A \cap R)}{p(A)} = \frac{P(R) \times P_R(A)}{p(A)} = \frac{r \times 1}{\frac{1}{3}(1 + 2r)} = \frac{3r}{1 + 2r}.$$

$$\boxed{P_A(R) = \frac{3r}{1 + 2r}.}$$

2) a) X suit une loi binomiale. En effet,

- 400 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « l'étudiant donne la bonne réponse » avec une probabilité $p = P(A) = \frac{1}{3}(1+2r)$ d'après la question 1)b) et « l'étudiant ne donne pas la bonne réponse » avec une probabilité $1 - p = 1 - \frac{1}{3}(1 + 2r) = \frac{2}{3}(1 - r)$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = \frac{1}{3}(1 + 2r)$.

On sait alors que pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant 400$,

$$P(X=k) = \binom{400}{k}\left(\frac{1}{3}(1+2r)\right)^{k}\left(\frac{2}{3}(1-r)\right)^{400-k}.$$

b) Dans cette question, $n = 400$ et $f = \dfrac{240}{400} = 0,6$. On note que $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$.
Un intervalle de confiance au seuil de 95% de l'estimation de p est

$$\left[0,6 - \frac{1}{\sqrt{400}}; 0,6 - \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [0,55; 0,65].$$

Ainsi, on a au moins 95% de chances que $0,55 \leqslant p \leqslant 0,65$. Or,

$$0,55 \leqslant p \leqslant 0,65 \Leftrightarrow 0,55 \leqslant \frac{1}{3}(1+2r) \leqslant 0,65 \Leftrightarrow 1,65 \leqslant 1+2r \leqslant 1,95 \Leftrightarrow 0,65 \leqslant 2r \leqslant 0,95$$
$$\Leftrightarrow 0,325 \leqslant r \leqslant 0,475.$$

Un intervalle de confiance de r au seuil de 95% est $[0,325; 0,475]$.

c) i) X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = \dfrac{1}{3}(1 + 2 \times 0,4) = 0,6$. L'espérance de X est

$$E(X) = np = 400 \times 0,6 = 240$$

et la variance de X est

$$V(X) = np(1-p) = 400 \times 0,6 \times 0,4 = 96.$$

L'énoncé nous dit alors que l'on approche la loi de X par la loi normale de paramètres $\mu = 240$ et $\sigma^2 = 96$ ou encore $\sigma = \sqrt{96} = 9,7$ à 10^{-1} près.

ii) On lit dans la case B17 du tableau fourni en annexe $P(X \leqslant 250) = 0,846$ et en particulier $P(X \leqslant 250) = 0,84$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 3

Partie A

1) Limite de f en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.}$$

Limite de f en $-\infty$. Pour tout réel x, $f(x)=xe^x+e^x$.
Or $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et d'autre part, d'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=0.}$$

2) Pour tout réel x,

$$f'(x)=(x+1)'e^x+(x+1)\left(e^x\right)'=1\times e^x+(x+1)\times e^x=(x+2)e^x.$$

3) Pour tout réel x, $e^x>0$. Donc, pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $x+2$. Par suite, la fonction f' est strictement négative sur $]-\infty,-2[$, strictement positive sur $]-2,+\infty[$ et s'annule en -2.
On en déduit le tableau de variation de la fonction f

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1) a) Soit m un réel. Pour tout réel x,

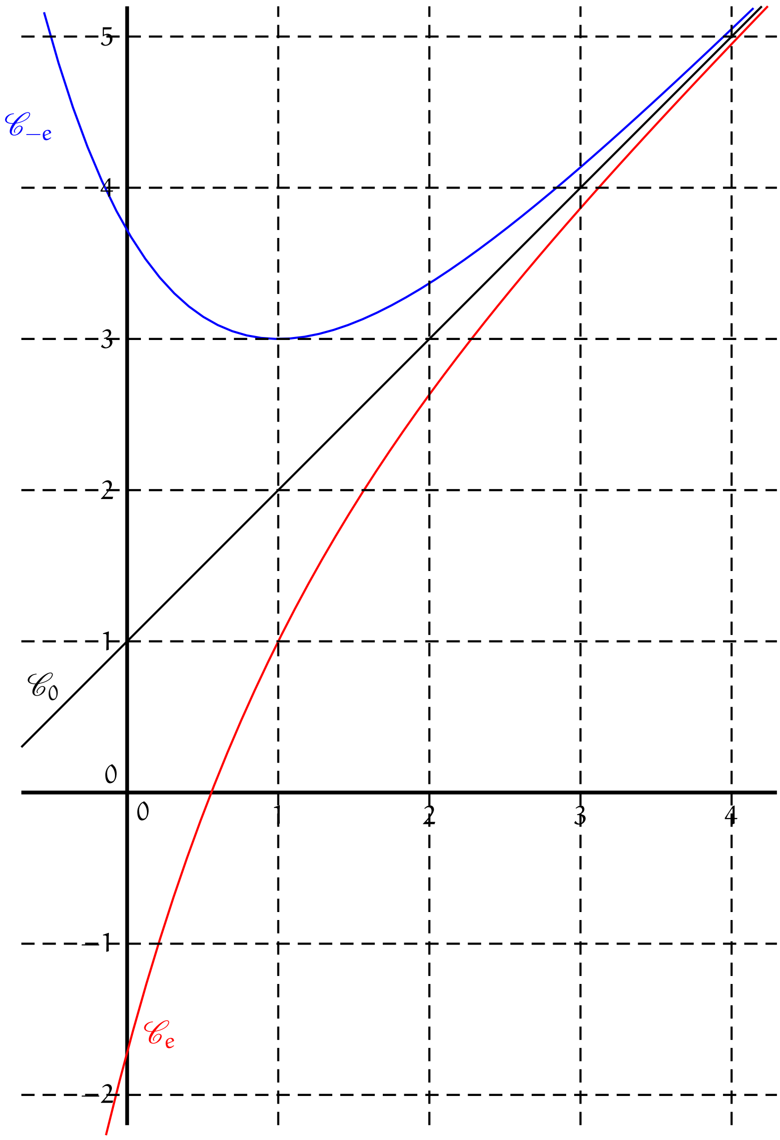
$$\begin{aligned}g_m(x)=0 &\Leftrightarrow x+1-me^{-x}=0\Leftrightarrow x+1=me^{-x}\Leftrightarrow (x+1)e^x=me^{-x}e^x \text{ (car } e^x\neq 0)\\ &\Leftrightarrow f(x)=m.\end{aligned}$$

b) Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $g_m(x)=0$ ou encore les solutions de l'équation $f(x)=m$ d'après la question 1) de la partie B.

A l'aide du tableau de variations de la fonction f déterminé à la question 3) de la partie A, on peut affirmer que

- si $m<e^{-2}$, $\mathscr{C}_m$ n'a aucun point commun avec l'axe (Ox).
- si $m=e^{-2}$, $\mathscr{C}_m$ a exactement un point commun avec l'axe (Ox).
- si $e^{-2}<m<0$, $\mathscr{C}_m$ a exactement deux points commun avec l'axe (Ox).
- si $m\geqslant 0$, $\mathscr{C}_m$ a exactement un point commun avec l'axe (Ox).

2) $\mathscr{C}_0$ est le graphe d'une fonction affine et donc $\mathscr{C}_0$ est une droite. Il s'agit de la courbe 2.
$-e=-2,7\ldots$ et $-e^{-2}=-0,1\ldots$ Donc $-e<e^{-2}$. D'après la question précédente, la courbe $\mathscr{C}_{-e}$ n'a pas de point commun avec l'axe (Ox). La courbe $\mathscr{C}_{-e}$ est donc nécessairement la courbe 1.
La courbe 3 est par suite la courbe $\mathscr{C}_e$.



3) Soit m un réel. La position relative de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 1$ est obtenue grâce au signe de l'expression $g_m(x) - (x + 1)$ suivant les valeurs de x.

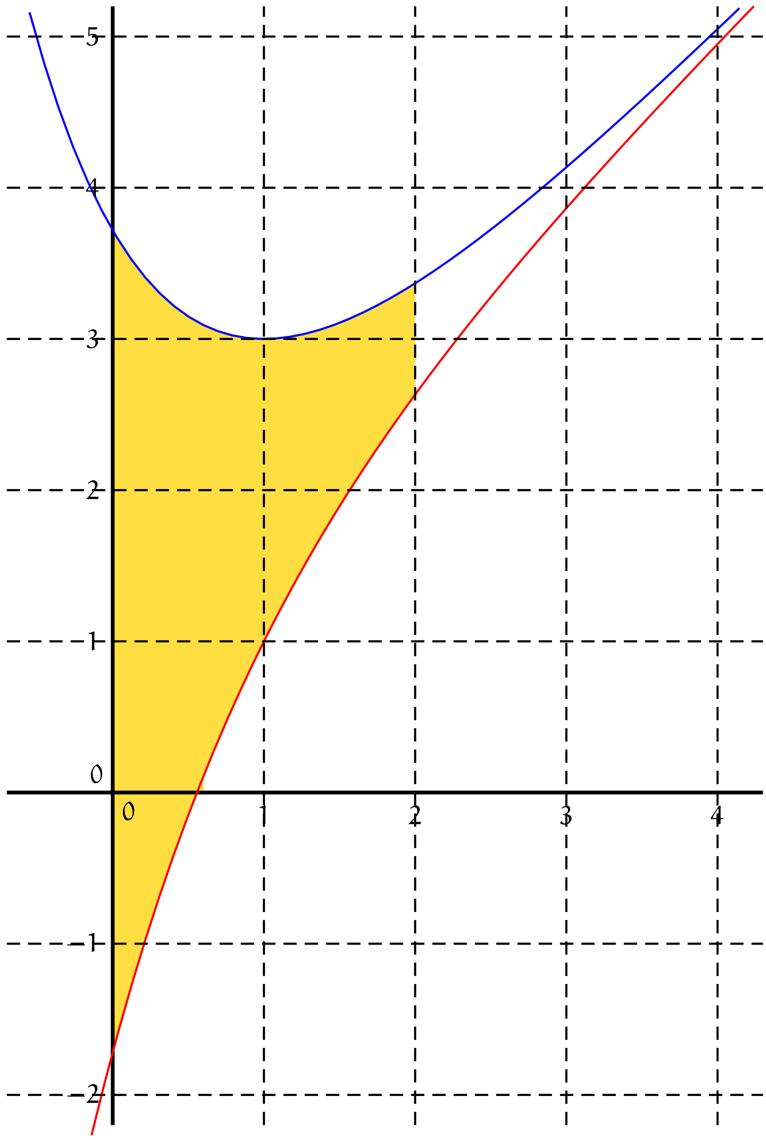
Pour tout réel x,

$$g_m(x) - (x + 1) = x + 1 - me^{-x} - x - 1 = -me^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc pour tout réel x, $g_m(x) - (x + 1)$ est du signe de $-m$. On en déduit que

- si $m < 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x + 1) > 0$ et dans ce cas, $\mathscr{C}_m$ est strictement au-dessus de $\mathscr{D}$ sur $\mathbb{R}$,
- si $m > 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x + 1) < 0$ et dans ce cas, $\mathscr{C}_m$ est strictement au-dessous de $\mathscr{D}$ sur $\mathbb{R}$,
- si $m = 0$, $\mathscr{C}_m$ est la droite $\mathscr{D}$.

4) a)



b) Soit a un réel positif. D'après la question 3), pour tout réel x de $[0, a]$, $g_{-e}(x) \geqslant x + 1 \geqslant g_e(x)$ et en particulier, pour tout réel x de $[0, a]$, $g_{-e}(x) \geqslant g_e(x)$. On en déduit que

$$\mathscr{A}(a) = \int_0^a (g_{-e}(x) - g_e(x))\,dx.$$

Pour tout réel x de $[0, a]$, $g_{-e}(x) - g_e(x) = (x + 1 + e \times e^{-x}) - (x + 1 - e \times e^{-x}) = e \times e^{-x} + e \times e^{-x} = 2e \times e^{-x}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(a) &= \int_0^a 2e \times e^{-x}\,dx \\
&= 2e \int_0^a e^{-x}\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= 2e\left[-e^{-x}\right]_0^a = 2e\left(\left(-e^{-a}\right) - \left(-e^0\right)\right) = 2e\left(1 - e^{-a}\right) \\
&= 2e - 2e^{1-a}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } a,\ \mathscr{A}(a) = 2e - 2e^{1-a}.}$$

$\lim\limits_{a \to +\infty} e^{1-a} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$. Par suite, $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathscr{A}(a) = 2e - 2 \times 0 = 2e$.

$$\boxed{\lim_{a \to +\infty} \mathscr{A}(a) = 2e.}$$

EXERCICE 4

Partie A

1) $a_0 = \mathrm{Re}(z_0) = 1$ et $b_0 = \mathrm{Im}(z_0) = 1$.

2) $|z_0| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ puis

$$z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{3} = \frac{1 + i + \sqrt{2}}{3} = \frac{1 + \sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i,$$

et donc $a_1 = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.

3) a) Tableau.

K	A	B
1	$0,8047$	$0,3333$
2	$0,5586$	$0,1111$

b) Pour un nombre N donné, l'algorithme affiche la valeur de a_N.

Partie B

1) Soit n un entier naturel.

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3} = \frac{a_n + ib_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} + i\frac{b_n}{3}.$$

Puisque $\dfrac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$ et $\dfrac{b_n}{3}$ sont des réels, on en déduit que $a_{n+1} = \dfrac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{3}$.

2) La suite (b_n) est la suite géométrique de premier terme $b_0 = 1$ et de raison $q = \dfrac{1}{3}$. On sait que pour tout entier naturel n,

$$b_n = b_0 \times q^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Puisque $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$.

3) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
|z_{n+1}| &= \left|\frac{z_n + |z_n|}{3}\right| = \frac{|z_n + |z_n||}{|3|} = \frac{|z_n + |z_n||}{3} \\
&\leqslant \frac{|z_n| + ||z_n||}{3} = \frac{|z_n| + |z_n|}{3} \text{ (car } |z_n| \text{ est un réel positif)} \\
&= \frac{2|z_n|}{3}.
\end{aligned}$$

b) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

- $u_0 = |z_0| = \sqrt{2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \sqrt{2}$. En particulier, $u_0 \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \sqrt{2}$. L'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$ et montrons que $u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= |z_{n+1}| \\
&\leqslant \frac{2|z_n|}{3} \text{ (d'après la question précédente)} \\
&= \frac{2}{3}u_n \\
&\leqslant \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

c) Soit n un entier naturel n.

$$u_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geqslant \sqrt{a_n^2} = |a_n|.$$

et donc $|a_n| \leqslant u_n$.

A partir de la question précédente, on en déduit encore que pour tout entier naturel n, $|a_n| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

Puisque $-1 < \frac{2}{3} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = 0$. Mais alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

