BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Spécifique

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{1-x}.$$

1) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = e \times \dfrac{x}{e^x}$.

2) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

4) Déterminer la dérivée de la fonction f.

5) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

1) Vérifier que, pour tout réel x : $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.
On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

2) Comparer les fonctions h_n et g'_n, g'_n étant la dérivée de la fonction g_n.
En déduire que, pour tout réel $x \neq 1$: $h_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

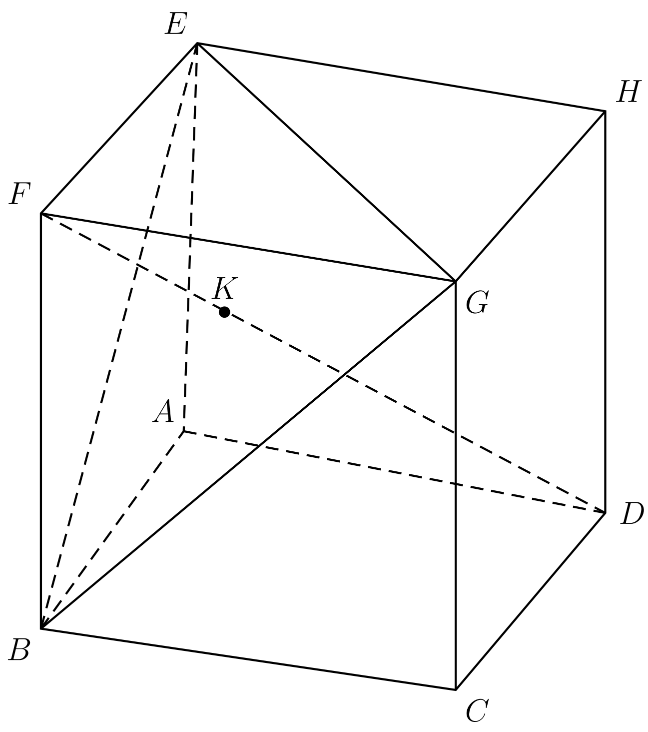
3) Soit $S_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$, f étant la fonction définie dans la partie A.
En utilisant les résultats de la **partie B**, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 (4 points)

(commun à tous les candidats)

Partie A

On considère le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1, représenté ci-dessous et on munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.



1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

2) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}(1; -1; 1)$ est un vecteur normal au plan (BGE) et déterminer une équation du plan (BGE).

3) Montrer que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) en un point K de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.

4) Quelle est la nature du triangle BEG ? Déterminer son aire.

5) En déduire le volume du tétraèdre $BEGD$.

EXERCICE 3 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère l'équation

$$(E): \quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

1) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2) On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.

a) Vérifier que z_1 est une solution de (E).

b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.

c) Placer les points $M_1,\ M_2,\ M_3$ et M_4 sur la figure donnée en annexe et tracer, sur la figure donnée en annexe, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.

3) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n = 2^n \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n i}{2}\right)$.

4) Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5) On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.

a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ell_n = 2\sqrt{3}\,(2^n - 1)$.

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell_n \geqslant 1\ 000$.

EXERCICE 4 (5 points)

(commun à tous les candidats)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Partie A

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de $10\ \%$. L'étude a également permis de prouver que $30\ \%$ des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que $8\ \%$ pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les évènements :

M : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »
C : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1) a) Montrer que $P(M \cap C) = 0,03$.

b) Calculer $P(C)$.

2) On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ?

Partie B

La sécurité sociale décide de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française.

On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1) Définir la loi de la variable aléatoire X.

2) Déterminer $P(X = 35)$.

3) Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

Partie C

1) On considère la variable aléatoire F, définie par $F = \dfrac{X}{400}$, X étant la variable aléatoire de la **partie B**.

Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de $95\ \%$.

2) Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

Qu'en pensez-vous ?

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Annexe, Exercice 3