Amérique du sud. Novembre 2013. Enseignement de spécialité

EXERCICE 1

Partie A

1) Soit x un réel.

$$f(x) = xe^{1-x} = x \times e^1 \times e^{-x} = e \times x \times \frac{1}{e^x} = e \times \frac{x}{e^x}.$$

2) Limite de f en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

3) Limite de f en $+\infty$. D'après la question 1), pour tout réel x, $f(x) = e \times \dfrac{x}{e^x}$.
D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. En prenant l'inverse, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ puis

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

4) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$f'(x) = 1 \times e^{1-x} + x \times (-1) \times e^{1-x} = (1-x)e^{1-x}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f'(x) = (1-x)e^{1-x}.}$$

5) Pour tout réel x, on a $e^{1-x} > 0$ et donc pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1-x$. On en déduit le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Partie B

1) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}(1-x)g_n(x) &= g_n(x) - xg_n(x)\\ &= \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n\right) - \left(x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n + x^{n+1}\right)\\ &= 1 + \left(x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n\right) - \left(x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n\right) - x^{n+1}\\ &= 1 - x^{n+1}\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \neq 1,\ g_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.}$$

2) Pour tout réel x, $h_n(x) = g_n'(x)$ et donc pour tout réel $x \neq 1$,

$$\begin{aligned}h_n(x) &= \frac{(-(n+1)x^n)(1-x) - \left(1-x^{n+1}\right)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}\\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \neq 1,\ h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.}$$

3) Soit n un entier naturel non nul

$$S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \frac{1}{e^0} + \frac{2}{e^1} + \frac{3}{e^2} + \cdots + \frac{n}{e^{n-1}} = 1 + 2 \times \left(\frac{1}{e}\right)^1 + 3 \times \left(\frac{1}{e}\right)^2 + \cdots + n \times \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$$

$$= h_n\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n + 1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2}$$

Pour tout entier naturel non nul n, $n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = ne^{-n-1} = e^{-2} \times ne^{1-n} = e^{-2}f(n)$.

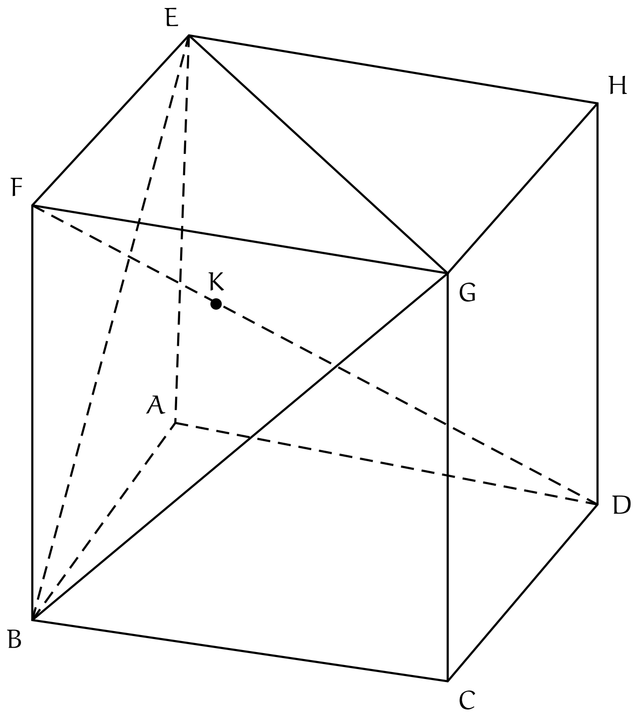
D'après la partie A, $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{-2}f(n) = 0$.

De même, pour tout entier naturel non nul n, $(n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n = (n+1)e^{-n} = (n+1)e^{1-(n+1)} = f(n+1)$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} f(n+1) = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{0 - 0 + 1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2} = \left(\frac{e}{e-1}\right)^2$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \left(\frac{e}{e-1}\right)^2.}$$

EXERCICE 2



1) Le point D a pour coordonnées $(0,1,0)$ et le point F a pour coordonnées $(1,0,1)$. La droite FD est la droite passant par $\mathsf{D}(1,0,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{\mathsf{DF}}(1,-1,1)$. Une représentation paramétrique de la droite (FD) est

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

2) Les points B, G et E ne sont pas alignés ou encore les vecteurs $\overrightarrow{\mathsf{BG}}$ et $\overrightarrow{\mathsf{BE}}$ ne sont pas colinéaires. Donc, les points B, G et E définissent un unique plan à savoir le plan (BGE).
Le point B a pour coordonnées $(1,0,0)$, le point G a pour coordonnées $(1,1,1)$ et le point E a pour coordonnées $(0,0,1)$. Le vecteur $\overrightarrow{\mathsf{BG}}$ a pour coordonnées $(0,1,1)$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathsf{BE}}$ a pour coordonnées $(-1,0,1)$.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{\mathsf{BG}} = 1\times 0 + (-1)\times 1 + 1\times 1 = 0-1+1 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{\mathsf{BE}} = 1\times(-1) + (-1)\times 0 + 1\times 1 = -1+0+1 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGE) et donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BGE).

Le plan (BGE) est le plan passant par $\mathsf{B}(1,0,0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1,-1,1)$. Une équation cartésienne du plan (BGE) est $1\times(x-1) - 1\times(y-0) + 1\times(z-0) = 0$ ou encore $x-y+z=1$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan (BGE) est } x-y+z=1.}$$

3) Le vecteur $\overrightarrow{\mathsf{DF}}$ a pour coordonnées $(1,-1,1)$ et donc $\overrightarrow{\mathsf{DF}} = \overrightarrow{n}$. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{\mathsf{DF}}$ est un vecteur normal au plan (BGE) et donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE).

Soit $\mathsf{M}(1+t,-t,1+t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite (FD).

$$\mathsf{M} \in (\mathsf{BGE}) \Leftrightarrow (1+t)-(-t)+(1+t) = 1 \Leftrightarrow 3t = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}.$$

Quand $t = -\frac{1}{3}$, on obtinent le point K de coordonnées $\mathsf{K}\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.

4) La diagonale d'un carré de côté a, $a\in\mathbb{R}$, a une longueur égale à $a\sqrt{2}$ d'après le théorème de PYTHAGORE. Donc, $\mathsf{BE} = \mathsf{BG} = \mathsf{EG} = \sqrt{2}$. Le triangle BEG est équilatéral.

La hauteur d'un traingle équilatéral de côté a, $a\in\mathbb{R}$ est égale à $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'après le théorème de PYTHAGORE. L'aire du triangle BEG est donc

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\boxed{\text{L'aire du triangle BEG est égale à } \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

5) D'après les question précédentes, la droite (KD) est la hauteur issue de D du tétraèdre BEGD.

$$\mathsf{DK} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Le volume du tétraèdre BEGD est $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire du triangle BEG à savoir $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $h = \mathsf{DK} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
Donc

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{\text{Le volume du tétraèdre BEGD est égal à } \frac{1}{3}.}$$

EXERCICE 3

1) Soit n un entier naturel. D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= P\left(a_{n+1}\right) = P\left(A_n \cap A_{n+1}\right) + P\left(B_n \cap A_{n+1}\right) + P\left(C_n \cap A_{n+1}\right) \\
&= P\left(A_n\right) \times P_{A_n}\left(A_{n+1}\right) + P\left(B_n\right) \times P_{B_n}\left(A_{n+1}\right) + P\left(C_n\right) \times P_{C_n}\left(A_{n+1}\right) \\
&= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n.
\end{aligned}$$

2) Soit n un entier naturel.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = MU_n$$

où $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Montrons alors par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = M^n U_0$.

- $M^0 U_0 = IU_0 = U_0$ et donc l'égalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $U_n = M^n U_0$ et montrons que $U_{n+1} = M^{n+1} U_0$.

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= M \times U_n \\
&= M \times M^n U_0 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= M^{n+1} \times U_0.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = M^n U_0$.

3) Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur colonne.

$$\begin{aligned}
MU = U &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = y \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = z \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ 3x + y - 3z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 2x - y \\ x - 3y + (2x - y) = 0 \\ 3x + y - 3(2x - y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 2x - y \\ 3x - 4y = 0 \\ -3x + 4y = 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x \\ z = 2x - \frac{3}{4}x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x \\ z = \frac{5}{4}x \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

Si de plus $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne tel que $x + y + z = 1$, alors

$$MU = U \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x \\ z = \frac{5}{4}x \\ x + y + z = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x \\ z = \frac{5}{4}x \\ x + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}x = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{5}{12} \end{array} \right. .$$

Ainsi, il existe une et une seule matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x+y+z=1$ et $MU = U$ à savoir $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix}$.

4) Soit n un entier naturel. En tenant compte de $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, on obtient

$$U_n = M^n U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3}\right) a_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) b_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) c_0 \\ \frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0 \\ \left(\frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3}\right) a_0 + \left(\frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) b_0 + \left(\frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) c_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2a_0}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{b_0}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{c_0}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} - \frac{2a_0}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{b_0}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{c_0}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \left(\frac{2a_0}{3} - \frac{b_0 + c_0}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \left(-\frac{2a_0}{3} + \frac{b_0 + c_0}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \left(\frac{2a_0}{3} - \frac{1 - a_0}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \left(-\frac{2a_0}{3} + \frac{1 - a_0}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \left(a_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} - \left(a_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n, $a_n = \frac{1}{3} + \left(a_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n = \frac{1}{4}$ et $c_n = \frac{5}{12} - \left(a_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Puisque $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc

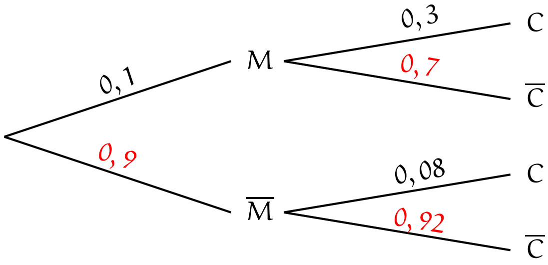
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{3},\ \lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{1}{4} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} c_n = \frac{5}{12}.$$

5) Au bout d'un grand nombre de navigations, les fréquences de connexion aux trois pages web tendent à se stabiliser autour de $\frac{1}{3}$ pour la page n° 1, $\frac{1}{4}$ pour la page n° 2 et $\frac{5}{12}$ pour la page n° 3 ou encore environ 33% pour la page n° 1, 25% pour la page n° 2 et 42% pour la page n° 3.

EXERCICE 4

Partie A

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



$$P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0,1 \times 0,3 = 0,03.$$

b) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(M \cap C) + P\left(\overline{M} \cap C\right) = P(M) \times P_M(C) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(C) \\ &= 0,1 \times 0,3 + (1 - 0,1) \times 0,08 = 0,03 + 0,072 = 0,102. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(C) = 0,102.}$$

2) La probabilité demandée est $P_C(M)$.

$$P_C(M) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0,03}{0,102} = \frac{30}{102} = \frac{15}{51} = 0,2941 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

$$\boxed{P_C(M) = 0,2941 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

Partie B

1) La taille de l'échantillon est suffisament petite par rapport à celle de la population pour que l'on puisse considérer les choix des quatre cents personnes de l'échantillon comme indépendants les uns des autres.

X suit une loi binomiale. En effet,

- 400 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « la personne choisie présente une malformation cardiaque de type anévrisme » avec une probabilité $p = 0,1$ et « la personne choisie ne présente pas une malformation cardiaque de type anévrisme » avec une probabilité $1 - p = 0,9$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,1$.

2) La calculatrice fournit $P(X = 35) = 0,0491$ arrondi à 10^{-4}.

3) La probabilité demandée est $p(X \geqslant 30)$. La calculatrice fournit

$$P(X \geqslant 30) = 1 - p(X \leqslant 29) = 0,9643 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

Partie C

1) Ici, $n = 400$ et $p = 0,1$. On note que $n \geqslant 30$ puis que $np = 40$ et donc $np \geqslant 5$ et que $n(1-p) = 360$ et donc que $n(1-p) \geqslant 5$. L'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95% est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,1 - 1,96\frac{\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{400}}; 0,1 + 1,96\frac{\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{400}}\right] = [0,0706; 0,1294].$$

2) La fréquence observée est $f = \dfrac{60}{400} = 0,25$. Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation. On peut en conclure que cet échantillon n'est pas représentatif de la population au risque de se tromper de 5 %.

