BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2012

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Polynésie

EXERCICE 1

1) a) • $B \in \Gamma \Leftrightarrow f(100) = 100 \Leftrightarrow 100e^{100a+b} = 100 \Leftrightarrow e^{100a+b} = 1 \Leftrightarrow 100a + b = \ln 1 \Leftrightarrow 100a + b = 0$.

• $C \in \Gamma \Leftrightarrow f(50) = \dfrac{50}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow 50e^{50a+b} = \dfrac{50}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^{50a+b} = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 50a + b = -\dfrac{1}{2}$.

Donc le couple $(a; b)$ est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{l} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -100a \\ 50a - 100a = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -100a \\ a = \dfrac{1}{100} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0,01 \\ b = -1 \end{array}\right. .$$

Donc,

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) = xe^{0,01x-1}.}$$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{0,01x-1} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et en multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

3) a) Soit x un réel.

$$f(x) = xe^{0,01x-1} = \frac{100}{e} \times \frac{e}{100} \times x \times e^{0,01x} \times e^{-1} = \frac{100}{e} \times e \times e^{-1} \times 0,01xe^{0,01x} = \frac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}.$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 0,01xe^{0,01x} = \lim\limits_{X \to -\infty} Xe^{X} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées puis $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x} = \dfrac{100}{e} \times 0 = 0$. Finalement,

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.}$$

4) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{0,01x-1} + x \times (0,01x - 1)'e^{0,01x-1} = (1 + 0,01x)e^{0,01x-1}.$$

Pour tout réel x, $e^{0,01x-1} > 0$ et donc pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1 + 0,01x$.
Or, $1 + 0,01x > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{0,01} \Leftrightarrow x > -100$ et de même $1 + 0,01x = 0 \Leftrightarrow x = -100$. Donc, la fonction f' est strictement positive sur $]-100, +\infty[$, strictement négative sur $]-\infty, -100[$ et s'annule en -100.

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.

On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-100		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-100e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

5) Pour tout réel x,

$$f(x) - x = xe^{0,01x-1} - x = x\left(1 - e^{0,01x-1}\right).$$

Etudions le signe de $1 - e^{0,01x-1}$. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}1 - e^{0,01x-1} > 0 &\Leftrightarrow -e^{0,01x-1} > -1 \Leftrightarrow e^{0,01x-1} < 1 \Leftrightarrow 0,01x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{0,01}\\ &\Leftrightarrow x < 100,\end{aligned}$$

et de même $1 - e^{0,01x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 100$. Etudions alors le signe de $f(x) - x$ dans un tableau de signes.

x	$-\infty$		0		100		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - e^{0,01x-1}$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que Γ est strictement au-dessus de Δ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]100, +\infty[$, strictement au-dessous sur $]0, 100[$ et enfin, Γ et Δ se coupent aux points $O(0,0)$ et $B(0,100)$.

6) a) Pour t dans $[0,100]$, posons $u(t) = t$ et $v(t) = 100e^{0,01t-1}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,100]$ et pour t dans $[0,100]$, on a

$$\begin{array}{ll} u(t) = t & v(t) = 100e^{0,01t-1} \\ u'(t) = 1 & v'(x) = e^{0,01t-1} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,100]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

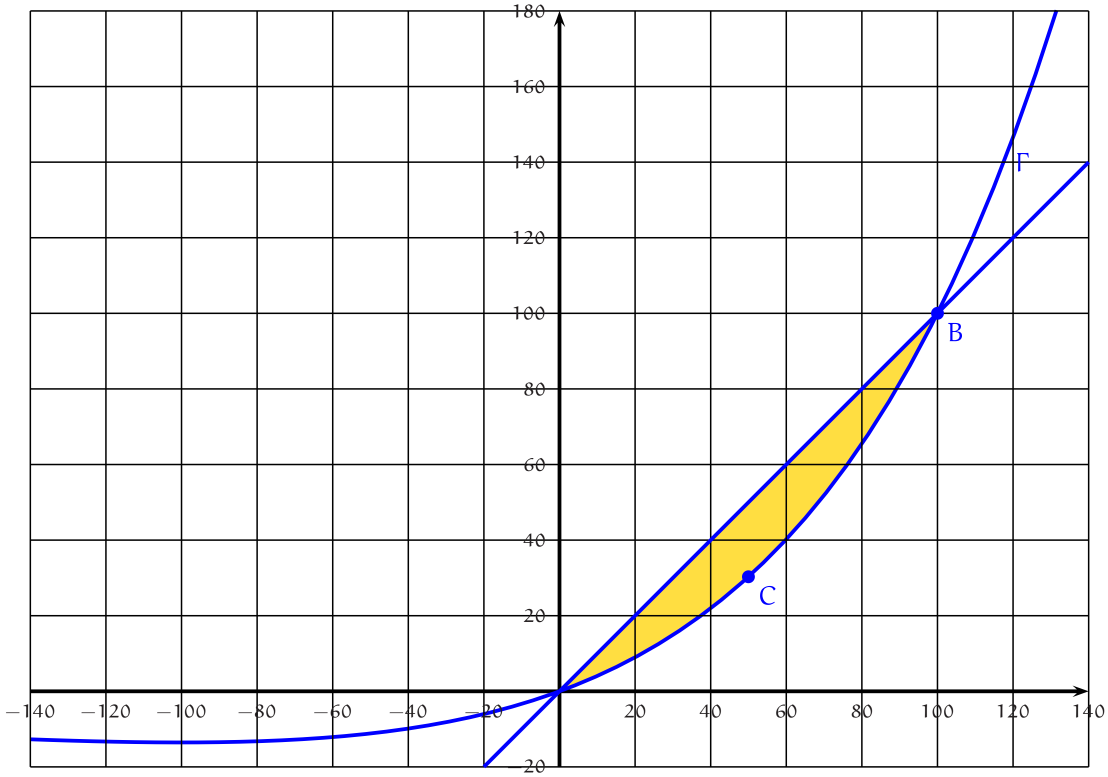
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,dt &= \left[t \times 100e^{0,01t-1}\right]_0^{100} - \int_0^{100} 1 \times 100e^{0,01t-1}\,dt = 100 \times 100e^0 - 0 - \int_0^{100} 100e^{0,01t-1}\,dt\\ &= 10000 - \left[100 \times 100e^{0,01t-1}\right]_0^{100} = 10000 - 10000\left(1 - e^{-1}\right) = \frac{10000}{e}.\end{aligned}$$

b) D'après la question 4), la courbe Γ est au-dessous de la droite (D) sur $[0,100]$. Donc,

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{100} (t - f(t))\,dt = \int_0^{100} t\,dt - \int_0^{100} f(t)\,dt \text{ (par linéarité de l'intégrale)}\\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{100} - \frac{10000}{e} = \frac{10000}{2} - \frac{10000}{e} = \frac{10000(e-2)}{2e}\\ &= \frac{5000(e-2)}{e}.\end{aligned}$$

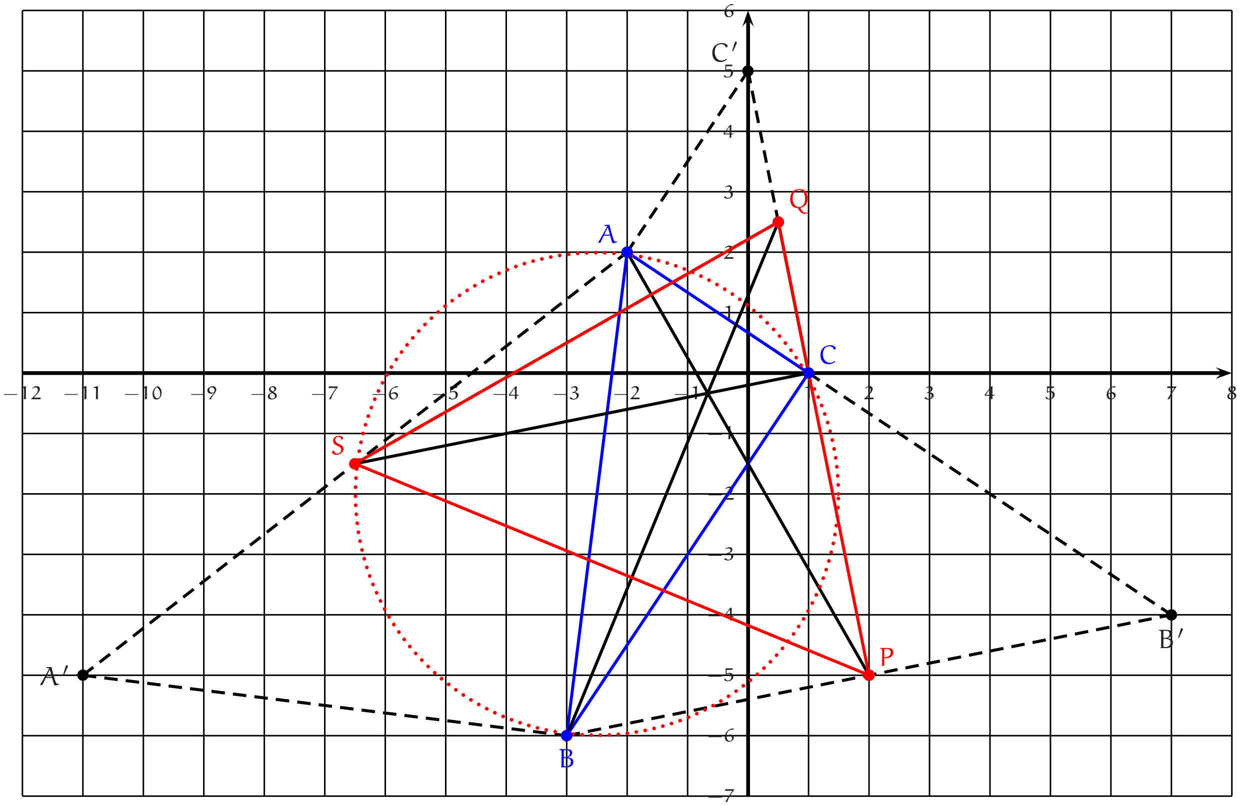
$$\boxed{A = \frac{5000(e-2)}{e}.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.



 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.

EXERCICE 2



1) • $AB^2 = |b-a|^2 = |(-3-6i)-(-2+2i)|^2 = |-1-8i|^2 = (-1)^2+(-8)^2 = 65$.
• $AC^2 = |c-a|^2 = |1-(-2+2i)|^2 = |3-2i|^2 = 3^2+(-2)^2 = 13$.
• $CB^2 = |b-c|^2 = |(-3-6i)-1|^2 = |-4-6i|^2 = (-4)^2+(-6)^2 = 52$.

Par suite, $AC^2 + CB^2 = 13+52 = 65 = AB^2$ et donc, d'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE,

$$\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est rectangle en } C.}$$

2) a) L'écriture complexe de r est $z' = z_B + e^{\frac{i\pi}{2}}(z - z_B)$ ou encore $z' = -3-6i+i(z+3+6i)$ ou enfin $z' = iz-9-3i$.

$$\boxed{\text{L'écriture complexe de } r \text{ est } z' = iz-9-3i.}$$

b) $z'_A = iz_A - 9 - 3i = i(-2+2i) - 9 - 3i = -11-5i$.

$$\boxed{\text{L'affixe de } A' \text{ est } -11-5i.}$$

c) $z_S = \dfrac{z_A + z_{A'}}{2} = \dfrac{-2+2i-11-5i}{2} = -\dfrac{13}{2} - \dfrac{3}{2}i$.

d) Le triangle ABC est rectangle en C d'après la première question. Le cercle circonscrit au triangle ABC est donc le cercle de diamètre $[AB]$.
Puisque $A' = r(A)$, le triangle ABA' est isocèle en B. La médiane issue de B du triangle ABA', à savoir la droite (BS) est donc aussi la hauteur issue de B de ce même triangle. Par suite, la droite (BS) est perpendiculaire à la droite (AA') ou encore le triangle (ASB) est rectangle en S. On en déduit que le point S appartient au cercle de diamètre $[AB]$ ou encore le point S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

3) a) $\dfrac{s-q}{p-a} = \dfrac{-\dfrac{13}{2}-\dfrac{3}{2}i-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i}{2-5i+2-2i} = \dfrac{-7-4i}{4-7i} = \dfrac{-i(4-7i)}{4-7i} = -i$.

b) On en déduit que :

(1) : $\dfrac{QS}{AP} = \dfrac{|s-q|}{|p-a|} = \left|\dfrac{s-q}{p-a}\right| = |-i| = 1$ et donc $AP = QS$.

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.

(2) : $\left(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{QS}\right) = \arg\left(\dfrac{s-q}{p-a}\right) = \arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et donc $(AP)\perp(QS)$.

4) $\dfrac{s-p}{q-b} = \dfrac{-\dfrac{13}{2}-\dfrac{3}{2}i-2+5i}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i+3+6i} = \dfrac{-\dfrac{17}{2}+\dfrac{7}{2}i}{\dfrac{7}{2}+\dfrac{17}{2}i} = \dfrac{-17+7i}{7+17i} = \dfrac{i(7+17i)}{7+17i} = i$ puis

$$\left(\overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{PS}\right) = \arg\left(\dfrac{s-p}{q-b}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

et donc $(BQ)\perp(PS)$. De même, $\dfrac{q-p}{s-c} = \dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i-2+5i}{-\dfrac{13}{2}-\dfrac{3}{2}i-1} = \dfrac{-\dfrac{3}{2}+\dfrac{15}{2}i}{-\dfrac{15}{2}-\dfrac{3}{2}i} = \dfrac{-3+15i}{-15-3i} = \dfrac{-i(-15-3i)}{-15-3i} = -i$ puis $(CS)\perp(PQ)$.

En résumé, $(AP)\perp(QS)$ ou encore (AP) est la hauteur issue de P du triangle PQS et de même (BQ) et (CS) sont les hauteurs issues respectivement de Q et S du triangle PQS. On sait que les hauteurs d'un triangle sont concourantes en l'othocentre de ce triangle et donc les droites (AP), (BQ) et (CS) sont concourantes.

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.

EXERCICE 3

Partie A

Si $N = 3$, k varie de 0 à 2.
Etape 1 $k = 0$ puis $U = 3 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = 3$
Etape 2 $k = 1$ puis $U = 3 \times 3 - 2 \times 1 + 3 = 10$
Etape 3 $k = 2$ puis $U = 3 \times 10 - 2 \times 2 + 3 = 29$

L'affichage en sortie est donc 29.

Partie B

1) $u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 + 3 = 3 \times 0 + 3 = 3$ et $u_2 = 3u_1 - 2 \times 1 + 3 = 3 \times 0 + 3 = 9 - 2 + 3 = 10$.

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

• Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et en particulier $u_0 \geqslant 0$. L'inégalité est donc vraie quand $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \geqslant n$.

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3 = n + 3 \geqslant n + 1.$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

b) Pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2(u_n - n) + 3 \geqslant 3 \text{ (d'après la question précédente)}$$

et en particulier $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ou encore $u_n \leqslant u_{n+1}$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n = 3u_n - 3n + 3 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n.$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$.

b) $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$ puis pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 \times q^n = 3^n.$$

Mais alors, pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + n - 1 = 3^n + n - 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n, \ u_n = 3^n + n - 1.}$$

5) a) Soit p un entier naturel non nul. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.

b) Soit p un entier naturel non nul. $u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1 \geqslant 10^p + 3 \times 1 - 1 \geqslant 10^p$ puis, pour $n \geqslant 3p$, $u_n \geqslant 10^p$ car la suite (u_n) est croissante.
Donc l'entier $3p$ est un rang à partir duquel on a $u_n \geqslant 10^p$. Puisque n_0 est le plus petit des rangs à partir duquel $u_n \geqslant 10^p$, on a $n_0 \leqslant 3p$.

c) $u_0 = 0 < 10^3$, $u_1 = 3 < 10^3$, $u_2 = 10 < 10^3$, $u_3 = 29 < 10^3$, $u_4 = 84 < 10^3$, $u_5 = 247 < 10^3$, $u_6 = 734 < 10^3$, $u_7 = 2193 \geqslant 10^3$. Donc, si $p = 3$ alors $n_0 = 7$.

d)

Entrée	Saisir le nombre entier naturel non nul p
Traitement	Affecter à N la valeur 0 Tant que $3 \wedge n + n - 1 < 10^p$ Affecter à N la valeur $N + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher$N$.

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.

EXERCICE 4

Partie A

1) $25 \times 13 - 108 \times 3 = 325 - 324 = 1$. Donc le couple $(x_0, y_0) = (13, 3)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E). Notons alors que les entiers relatifs 25 et 108 sont premiers entre eux d'après le théorème de Bézout.

2) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$25x - 108y = 1 \Leftrightarrow 25x - 108y = 25x_0 - 108y_0 \Leftrightarrow 25(x - x_0) = 108(y - y_0).$$

Ainsi, si (x, y) est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E), alors l'entier 108 divise $108(y - y_0) = 25(x - x_0)$ et puisque 108 et 25 sont des entiers premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que 108 divise $x - x_0$. Par suite, il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 108k$ ou encore $x = x_0 + 108k$.
De même, l'entier 25 divise $y - y_0$ et donc il existe un entier relatif k' tel que $y - y_0 = 25k'$ ou encore $y = y_0 + 25k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 108k$ et $y = y_0 + 25k'$.

$$25x - 108y = 1 \Leftrightarrow 25(x_0 + 108k) - 108(y_0 + 25k') = 1 \Leftrightarrow 25 \times 108 \times (k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'.$$

Finalement,

$$\boxed{\text{les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation } (E) \text{ sont les couples de la forme } (13 + 108k, 3 + 25k),\ k \in \mathbb{Z}.}$$

Partie B

1) Si $x \equiv a\ [7]$ et $x \equiv a\ [19]$, alors $x - a$ est un multiple de 7 et 19 puis $x - a$ est un multiple du PPCM de 7 et 19. Puisque 7 et 19 sont deux nombres premiers distincts, 7 et 19 sont premiers entre eux et donc le PPCM de 7 et 19 est 7×19 c'est-à-dire 133. Finalement, $x - a$ est un multiple de 133 ou encore $x \equiv a\ [133]$.

2) a) Puisque a n'est pas multiple de 7, le petit théorème de Fermat permet d'affirmer que $a^{7-1} \equiv 1\ [7]$ ou encore $a^6 \equiv 1\ [7]$. Mais alors $\left(a^6\right)^{18} \equiv 1^{18}\ [7]$ ou encore $a^{108} \equiv 1\ [7]$.

Ensuite, $\left(a^{25}\right)^g = a^{25g} = a^{1+108c} = a \times \left(a^{108}\right)^c$. Mais alors $\left(a^{25}\right)^g \equiv a \times 1^c\ [7]$ ou encore $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.

b) Si a est un multiple de 7, alors $a \equiv 0\ [7]$ puis $\left(a^{25}\right)^g \equiv \left(0^{25}\right)^g\ [7]$ ou encore $\left(a^{25}\right)^g \equiv 0\ [7]$. En résumé, $a \equiv 0\ [7]$ et $\left(a^{25}\right)^g \equiv 0\ [7]$. En particulier, $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.

c) $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$ et $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [19]$. D(après la question 1) de la partie B, $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [133]$.

Partie C

1) $r_1 \equiv r^{13}\ [133]$ et $r^{13} \equiv \left(a^{25}\right)^{13}\ [133]$. Donc, $r_1 \equiv \left(a^{25}\right)^{13}\ [133]$. D'autre part, le couple $(g, c) = (13, 3)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E) d'après la question 1) de la partie A. Mais alors $\left(a^{25}\right)^{13} \equiv a\ [133]$ d'après la question 2)c) de la partie B.

En résumé, $r_1 \equiv \left(a^{25}\right)^{13}\ [133]$ et $\left(a^{25}\right)^{13} \equiv a\ [133]$. On en déduit que $r_1 \equiv a\ [133]$.

2) $128^2 \equiv (-5)^2\ [133]$ ou encore $128^2 \equiv 25\ [133]$ puis $128^{12} \equiv 25^6\ [133]$.
$25^6 = 5^{12} = \left(5^3\right)^4 = 125^4$ et donc $128^{12} \equiv (-8)^4\ [133]$ ou encore $128^{12} \equiv 8^4\ [133]$.
$8^4 = 2^{12} = 2^7 \times 2^5 = 128 \times 32$ et donc $128^{12} \equiv -5 \times 32\ [133]$ ou encore $128^{12} \equiv -160\ [133]$ ou encore $128^{12} \equiv -160 + 133\ [133]$ ou enfin $128^{12} \equiv -27\ [133]$.
$128^{13} = 128^{12} \times 128$ et donc $128^{13} \equiv -27 \times -5\ [133]$ ou encore $128^{13} \equiv 135\ [133]$ ou enfin $128^{13} \equiv 2\ [133]$ (avec $0 \leqslant 2 < 133$).

$59^2 = 3481 = 23 + 26 \times 133$ et donc $59^2 \equiv 23\ [133]$ puis $59^{12} \equiv 23^6\ [133]$.
$23^2 = 529 = -3 + 4 \times 133$ et donc $23^2 \equiv -3\ [133]$ puis $59^{12} \equiv (-3)^3\ [133]$ ou encore $59^{12} \equiv -27\ [133]$.
Mais alors, $59^{13} \equiv -27 \times 59\ [133]$ ou encore $59^{13} \equiv -1593\ [133]$ ou encore $59^{13} \equiv -1593 + 12 \times 133\ [133]$ ou enfin $59^{13} \equiv -1593 + 12 \times 3\ [133]$ (avec $0 \leqslant 3 < 133$).

Le message qui a été codé est le message : 2 3.

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.