# BACCALAUREAT GENERAL

## Session de mai 2012

## MATHEMATIQUES

## - Série S -

## Enseignement de Spécialité

## France métropolitaine

---

**EXERCICE 1**

**1) VRAI**

**2) VRAI**

**3) FAUX**

**4) VRAI**

**1)** La courbe représentative de la fonction $f'$ est au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-3, -1]$ ou encore, pour tout réel $x$ de $[-3, -1]$, on a $f'(x) \leqslant 0$. L'affirmation de cette question 1) est donc vraie.

**2)** D'après le graphique fourni dans l'énoncé, la fonction $f'$ est positive sur l'intervalle $[-1, 2]$. Donc la fonction $f$ est croissante sur $[-1, 2]$. L'affirmation de cette question 2) est vraie.

**3)** La dérivée $f'$ de $f$ est strictement positive sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. En particulier, $f\left(-\frac{1}{2}\right) < f(0)$ ou encore $f\left(-\frac{1}{2}\right) < -1$. Ainsi, il existe un réel $x_0$ de $[-2, 3]$ tel que $f(x_0) < -1$ et donc l'affirmation de cette question 3) est fausse.

**4)** Une équation de la tangente $(T)$ à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse $0$ est

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

L'énoncé fournit $f(0) = -1$ et sur le graphique, on lit que $f'(0) = 1$. Une équation de $(T)$ est donc

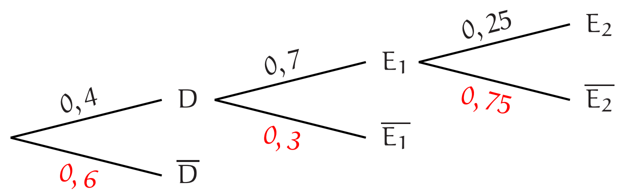
$$y = x - 1.$$

Soit $A$ le point de coordonnées $(1, 0)$. $x_A - 1 = 1 - 1 = 0 = y_A$ et donc le point $A$ appartient à $(T)$. L'affirmation de cette question 4) est donc vraie.

**EXERCICE 2**

**1) a)** Représentons la situation par un arbre.




**b)** $p(E_1) = p_D(E_1) \times p(D) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$.

$$\boxed{p(E_1) = 0,28.}$$

**c) 1ère solution.** L'événement $F$ est la réunion des trois événements $\overline{D}$, $\overline{E_1}$ et $\overline{E_2}$. De plus, ces événements sont deux à deux incompatibles. Donc,

$$p(F) = p\left(\overline{D}\right) + p\left(\overline{E_1}\right) + p\left(\overline{E_2}\right).$$

- $p\left(\overline{D}\right) = 1 - p(D) = 1 - 0,4 = 0,6$.
- $p\left(\overline{E_1}\right) = p_D\left(\overline{E_1}\right) \times p(D) = (1 - 0,7) \times 0,4 = 0,12$.
- $p\left(\overline{E_2}\right) = p_{E_1}\left(\overline{E_2}\right) \times p(E_1) = (1 - 0,25) \times 0,28 = 0,21$.

$$p(F) = p\left(\overline{D}\right) + p\left(\overline{E_1}\right) + p\left(\overline{E_2}\right) = 0,6 + 0,12 + 0,21 = 0,93.$$

**2ème solution.** L'événement $\overline{F}$ c'est-à-dire l'événement « le candidat est recruté » est encore l'événement $E_2$. Donc,

$$p\left(\overline{F}\right) = p(E_2) = p(E_1) \times p_{E_1}(E_2) = 0,28 \times 0,25 = 0,07$$

puis $p(F) = 1 - p\left(\overline{F}\right) = 1 - 0,07 = 0,93$.

$$\boxed{p(F) = 0,93.}$$

**2) a)** La variable aléatoire $X$ est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le candida t est recruté » avec une probabilité $p = 0,07$ ou « le candidat n'est pas recruté » avec une probabilité $1 - p = 0,93$.

La variable aléatoire $X$ suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,07$.

**b)** On sait alors que pour tout entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant 5$,

$$p(X = k) = \binom{5}{k} (0,07)^k (0,93)^{5-k}.$$

La probabilité demandée est $p(X = 2)$.

$$p(X = 2) = \binom{5}{2} (0,07)^2 (0,93)^3 = \frac{5 \times 4}{2} \times 0,07^2 \times 0,93^3 = 0,0394\ldots,$$

et donc

$$\boxed{\text{la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés est } 0,039 \text{ arrondie à } 10^{-3}.}$$

**3)** Soit $n$ le nombre de dossiers examinés par le cabinet de recrutement. On note toujours $X$ la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les $n$ candidats. La probabilité d'embaucher au moins un candidat est $p\,(X \geqslant 1)$.

$$p\,(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}(0,07)^0(0,93)^n = 1 - (0,93)^n.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
p(X \geqslant 1) \geqslant 0,999 &\Leftrightarrow 1-(0,93)^n \geqslant 0,999 \Leftrightarrow (0,93)^n \leqslant 0,001 \\
&\Leftrightarrow \ln\left((0,93)^n\right) \leqslant \ln(0,001) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur } ]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,93) \leqslant \ln(0,001) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,93)} \text{ (car } \ln(0,93) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 95,1\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 96 \text{ (car } n \text{ est un entier)}.
\end{aligned}$$

Le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$ est $96$.

**EXERCICE 3**

## Partie A

**1)** La limite d'une fraction rationnelle en $+\infty$ est égale à la limite du quotient de ses monômes de plus haut degré. Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$. Par suite, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=\lim_{X\to1}\ln(X)=\ln(1)=0$.

D'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.}$$

**2)** La fonction $x\mapsto\dfrac{x}{x+1}$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1,+\infty[$. De plus, pour tout réel $x$ de $[1,+\infty[$, $\dfrac{x}{x+1}>0$. On sait alors que la fonction $x\mapsto\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ est dérivable sur $[1,+\infty[$. D'autre part, la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x+1}$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1,+\infty[$. Finalement, la fonction $f$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $[1,+\infty[$. De plus, pour tout réel $x$ de $[1,+\infty[$,

**1er calcul :**

$$f'(x)=-\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}+\frac{\left(\dfrac{x}{x+1}\right)'}{\dfrac{x}{x+1}}=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{x+1}{x}\times\frac{1\times(x+1)-x\times1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x(x+1)}=\frac{-x+(x+1)}{x(x+1)^2}$$
$$=\frac{1}{x(x+1)^2}.$$

**2ème calcul :**

$$f'(x)=-\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}+(\ln(x))'-(\ln(x+1))'=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{-x+(x+1)^2-x(x+1)}{x(x+1)^2}$$
$$=\frac{-x+x^2+2x+1-x-x^2}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x(x+1)^2}.$$

**3)** Pour tout réel $x$ de $[1,+\infty[$, $f'(x)>0$. Donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Mais alors, pour tout $x$ de $[1,+\infty[$, on a $f(x)<\lim\limits_{+\infty}f$ ou encore $f(x)<0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement négative sur } [1,+\infty[.}$$

## Partie B

**1)**
- Initialisation : $u=0$.
- Etape 1 : $i=1$ puis $u=0+\dfrac{1}{1}=1$.
- Etape 2 : $i=2$ puis $u=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.
- Etape 3 : $i=3$ puis $u=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{6}$.

Si $n=3$, la valeur exacte affichée par l'algorithme est $\dfrac{13}{6}$.

**2)**

| | |
|---|---|
| Variables : | $i$ et $n$ sont des entiers naturels. |
| | $u$ est un réel. |
| Entrée : | Demander à l'utilisateur le valeur de $n$. |
| Initialisation : | Affecter à $u$ la valeur $0$. |
| Traitement : | Pour $i$ variant de $1$ à $n$. |
| | Affecter à $u$ la valeur $u+\dfrac{1}{i}$. |
| Sortie : | Afficher $u-\ln(n)$ |

**3)** Il semble que la suite $(u_n)$ soit décroissante, convergente de limite approximativement égale à $0,57$.

## Partie C

**1)** Soit $n$ un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \ln(n+1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1}$$

D'après la question 3) de la partie A, le fonction $f$ est strictement négative sur $[1, +\infty[$. En particulier, pour tout entier $n \geqslant 1$, $f(n) < 0$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul $n$, on a $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

**2) a)** Soit $k$ un entier strictement positif. La fonction $x \mapsto \frac{1}{k} - \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et en particulier sur $[k, k+1]$. Donc l'intégrale $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx$ existe.

Pour tout réel $x$ de l'intervalle $[k, k+1]$, on a $x \geqslant k > 0$ puis $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$ (par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$) et donc $\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout réel $x$ de $[k, k+1]$, on a $\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geqslant 0$.

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx = \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx - \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{k} \times (k+1-k) - \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx.$$

Par suite, $\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \geqslant 0$ ou encore $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leqslant \frac{1}{k}$.

Enfin, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = [\ln(x)]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k$ et on a donc montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier } k \text{ strictement positif, } \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k} \quad (1).}$$

**b)** Soit $n$ un entier strictement positif. D'après la question précédente,

$$\begin{array}{lcc}
\ln(2) - \ln(1) & \leqslant & 1 \\
\ln(3) - \ln(2) & \leqslant & \frac{1}{2} \\
\ln(4) - \ln(3) & \leqslant & \frac{1}{3} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\ln(n-1) - \ln(n-2) & \leqslant & \frac{1}{n-2} \\
\ln(n) - \ln(n-1) & \leqslant & \frac{1}{n-1} \\
\ln(n+1) - \ln(n) & \leqslant & \frac{1}{n}
\end{array}$$

On additionne membre à membre ces $n$ inégalités. Dans le premier membre, les nombres $\ln(2)$, $\ln(3)$, $\ldots$, $\ln(n-1)$ et $\ln(n)$ se simplifient et il reste $-\ln(1) + \ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ ou encore $\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

**c)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On retranche $\ln(n)$ à chacun des deux membres de l'inégalité précédente et on obtient $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ ou encore

$$u_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(n).$$

Par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$, on a $\ln(n+1) \geqslant \ln(n)$ puis $\ln(n+1) - \ln(n) \geqslant 0$. Par suite, $u_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(n) \geqslant 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier strictement positif } n,\ u_n \geqslant 0.}$$

**3)** La suite $(u_n)$ est décroissante d'après la question 1) et minorée par $0$ d'après la question 2). On en déduit que la suite $(u_n)$ converge.

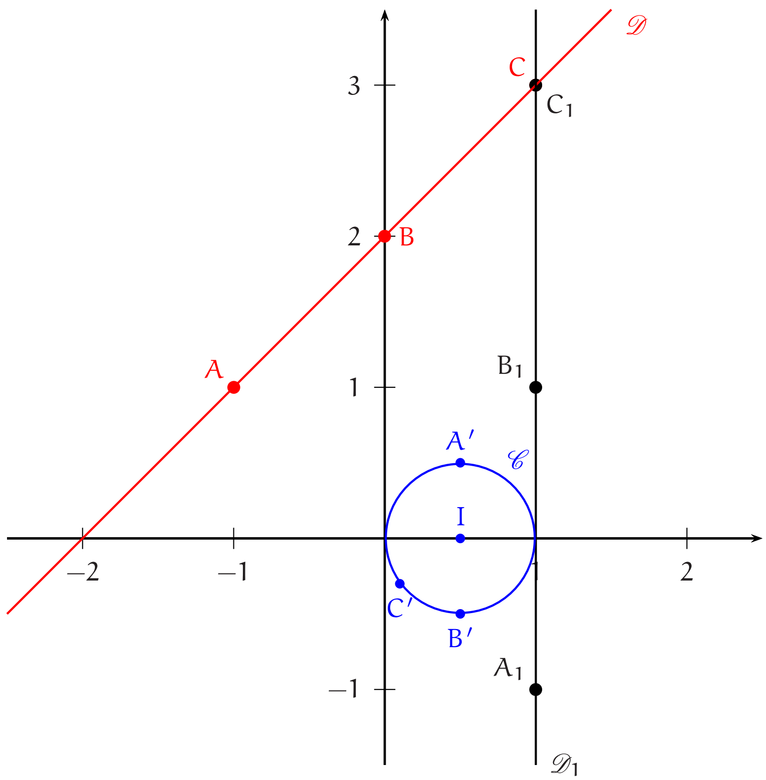
 

**EXERCICE 4**

**1)** Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(-1, 1)$, $(0, 2$ et $(1, 3)$.

• $x_A + 2 = -1 + 2 = 1 = y_A$. Donc le point A appartient à la droite $\mathscr{D}$.
• $x_B + 2 = 0 + 2 = 2 = y_B$. Donc le point B appartient à la droite $\mathscr{D}$.
• $x_C + 2 = 1 + 2 = 3 = y_C$. Donc le point C appartient à la droite $\mathscr{D}$.

**Graphique.**




**2)** Soit $z$ un nombre complexe.

$$(1+i)z + 3 - i = 0 \Leftrightarrow (1+i)z = -3 + i \Leftrightarrow z = \frac{-3+i}{1+i} \Leftrightarrow z = \frac{(-3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \Leftrightarrow z = \frac{-3+3i+i+1}{1^2+1^2}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-2+4i}{2} \Leftrightarrow z = -1 + 2i.$$

On note $\Omega$ le point d'affixe $-1+2i$. $x_\Omega + 2 = -1 + 2 = 1 \neq 2 = y_\Omega$. Donc le point D n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

**3) a)** L'expression complexe de $g$ est de la forme $z' = \alpha z + \beta$ où $\alpha = 1 + i$ et $\beta = 3 - i$ sont deux nombres complexes tels que $\alpha \neq 0$. Donc $g$ est une similitude directe.

• $\alpha = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.
Le rapport de $g$ est $k = |\alpha| = \sqrt{2}$ et l'angle de $g$ est $\theta = \arg(\alpha) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

• Le centre de $g$ est l'unique point invariant par $g$. Le centre de $g$ est donc le point $\Omega(-1, 2)$ d'après la question précédente.

$$\boxed{g \text{ est la similitude directe de rapport } k = \sqrt{2}, \text{ d'angle } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ et de centre } \Omega(-1,2).}$$

**b)** • $z_{A_1} = (1+i)z_A + 3 - i = (1+i)(-1+i) + 3 - i = -1 - 1 + 3 - i = 1 - i$. Donc $A_1$ a pour coordonnées $(1, -1)$.
• $z_{B_1} = (1+i)z_B + 3 - i = (1+i)(2i) + 3 - i = 2i - 2 + 3 - i = 1 + i$. Donc $B_1$ a pour coordonnées $(1, 1)$.
• $z_{C_1} = (1+i)z_C + 3 - i = (1+i)(1+3i) + 3 - i = 1 + 3i + i - 3 + 3 - i = 1 + 3i$. Donc $C_1$ a pour coordonnées $(1, 3)$.

**c)** D'après la question 1), la droite $\mathscr{D}$ est la droite (AB).
On sait que l'image d'une droite par une similitude directe est une droite. Par suite, $\mathscr{D}_1$ est la droite $\mathscr{D}_1$ passant par $A_1 = g(A)$ et $B_1 = g(B)$ ou encore $\mathscr{D}_1 = (A_1B_1)$. Puisque $A_1$ et $B_1$ ont même abscisse à savoir 1, une équation de $\mathscr{D}_1$ est $x = 1$. Voir graphique.

$\boxed{\mathscr{D}_1 \text{ est la droite d'équation } x = 1.}$

**4) a)** Les points $A_1$, $B_1$ et $C_1$ sont distincts de $O$ et donc les points $h(A_1)$, $h(B_1)$ et $h(C_1)$ existent.

• $z_{h(A_1)} = \dfrac{1}{z_{A_1}} = \dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+i}{1^2+(-1)^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$. Le point $h(A_1)$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.
• $z_{h(B_1)} = \dfrac{1}{z_{B_1}} = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i}{1^2+1^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$. Le point $h(B_1)$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.
• $z_{h(C_1)} = \dfrac{1}{z_{C_1}} = \dfrac{1}{1+3i} = \dfrac{1-3i}{(1+3i)(1-3i)} = \dfrac{1-3i}{1^2+3^2} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{3}{10}i$. Le point $h(C_1)$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{10}, -\dfrac{3}{10}\right)$.

$\mathscr{D}_1$ est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$. D'autre part, l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ telle que $|z-1| = |z|$ est l'ensemble des points $M$ à égale distance des points $O(0,0)$ et $\Omega(1,0)$. Cet ensemble est la médiatrice du segment $[O, \Omega]$ ou encore la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ ou enfin la droite $\mathscr{D}_1$.

**b)** Soit $z$ un nombre complexe non nul.

$$\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{2-z}{2z}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|2-z|}{2|z|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |2-z| = |z| \Leftrightarrow |-(z-2)| = |z| \Leftrightarrow |z-2| = |z|.$$

**c)** On note tout d'abord que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $x = 1$ est la médiatrice du segment joignant les points de coordonnées respectives $(0,0)$ et $(2,0)$. Par suite, la droite $\mathscr{D}_1$ est l'ensemble des points du plan à égale distance des points de coordonnées respectives $(0,0)$ et $(2,0)$ ou encore la droite $\mathscr{D}_1$ est l'ensemble des points d'affixe $z$ telle que $|z-2| = |z|$.

Soit $M_1$ un point de $\mathscr{D}_1$ dont l'affixe est notée $z_1$. $M_1$ est distinct de $O$ et donc $h(M_1)$ existe. De plus, $|z_1 - 2| = |z_1|$ et donc $\left|\dfrac{1}{z_1} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ d'après la question précédente. $\dfrac{1}{z_1}$ est l'affixe de $h(M_1)$ et donc, en notant I le point d'affixe $\dfrac{1}{2}$, $Ih(M_1) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, le point $h(M_1)$ est appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre I $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$. De plus, l'affixe $\dfrac{1}{z_1}$ de $h(M_1)$ n'est pas nulle et donc $h(M_1)$ appartient à $\mathscr{C} \setminus \{O\}$.

**d)** Inversement, soit $M'$ un point de $\mathscr{C} \setminus \{O\}$ dont l'affixe est notée $z'$ (de sorte que $z' \neq 0$). Soit $M_1$ le point d'affixe $z_1 = \dfrac{1}{z'}$. Déjà, l'affixe de $h(M_1)$ est $\dfrac{1}{1/z'} = z'$ et donc $h(M_1) = M'$. Vérifions alors que $M_1$ appartient à $\mathscr{D}_1$.

Puisque $M'$ appartient à $\mathscr{C} \setminus \{O\}$, on a $\left|z' - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ ou encore $\left|\dfrac{1}{z_1} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$. D'après la question 3)b), on a alors $|z_1 - 2| = |z_1|$ et donc le point $M_1$ appartient à $\mathscr{D}_1$.

**5)** Dans la question 3)c), on a montré que l'image d'un point de $\mathscr{D}_1$ est un point de $\mathscr{C} \setminus \{O\}$ et dans la question 3)d), on a montré que tout point de $\mathscr{C} \setminus \{O\}$ est l'image d'un point de $\mathscr{D}_1$. Finalement, $h(\mathscr{D}_1) = \mathscr{C} \setminus \{O\}$.

Mais alors, $f(\mathscr{D}) = h(g(\mathscr{D})) = h(\mathscr{D}_1) = \mathscr{C} \setminus \{O\}$.

$$\boxed{f(\mathscr{D}) = \mathscr{C} \setminus \{O\}.}$$