

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

**Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.
L'annexe de la page 6 est à rendre avec la copie.**
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

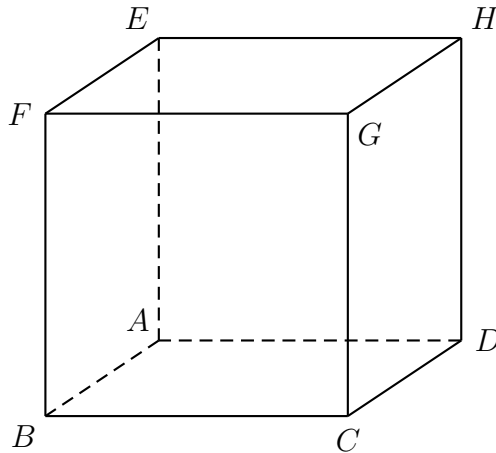
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. On se place dans le repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$. On considère les points $I\left(1; \frac{1}{3}; 0\right)$, $J\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$ et $L(a; 1; 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ) .
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t' \left(a - \frac{3}{4} \right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

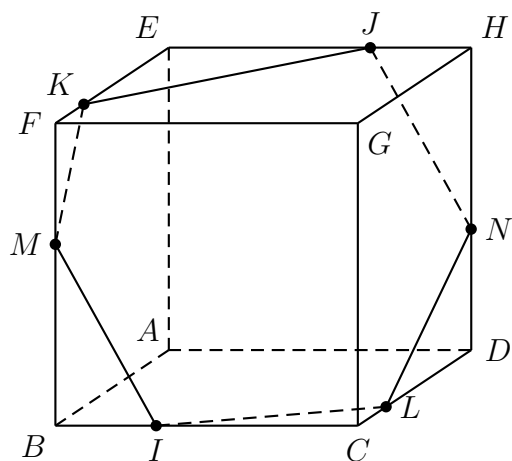
3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \frac{1}{4}$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.

Le point L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère $IKJL$ est un parallélogramme.
2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube $ABCDEFGH$ telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH) .



Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

- a) Prouver que le vecteur \vec{n} de coordonnées $(8; 9; 5)$ est un vecteur normal au plan (IJK) .
- b) En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.
- c) En déduire les coordonnées des points M et N.

EXERCICE 2 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx.$$

1. a) Soit g la fonction définie par $g(x) = xe^{x^2}$.

Démontrer que la fonction G définie sur \mathbb{R} par $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction g .

b) En déduire la valeur de I_1 .

c) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n , supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n.$$

d) Calculer I_3 et I_5

2. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$
Traitement	Tant que $n < 21$ Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}u$ Affecter à n la valeur $n + 2$
Sortie	Afficher u

Quel terme de la suite (I_n) obtient-on en sortie de cet algorithme ?

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $I_n \geq 0$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la valeur de ℓ .

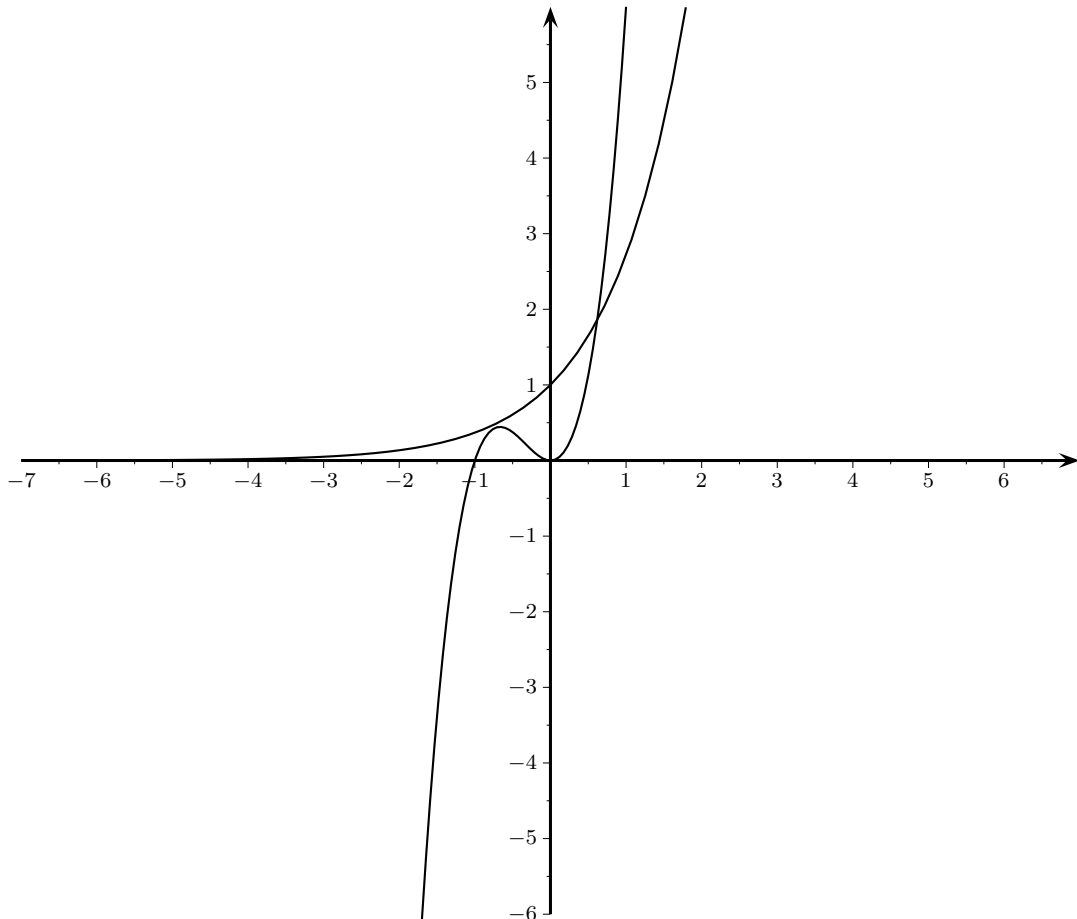
EXERCICE 3 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $e^x = 3(x^2 + x^3)$.

Partie A : Conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3(x^2 + x^3)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

- Étudier selon les valeurs de x , le signe de $x^2 + x^3$.
 - En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $] - \infty; -1]$.
 - Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
- On considère la fonction h , définie pour tout nombre réel de $] - 1; 0[\cup] 0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1 + x) - x.$$

Montrer que, sur $] - 1; 0[\cup] 0; +\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.

3. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $] - 1; 0[\cup] 0; +\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x + 1)}.$$

- b. Déterminer les variations de la fonction h .
c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.
d. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Toute trace de recherche sera valorisée.

1. On considère l'équation $(E) : 3x - 2y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.

Affirmation : les solutions de l'équation (E) sont les couples $(9+2k; 13+3k)$, avec k appartenant à l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs.

2. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par :

$$a = 3n + 1 \text{ et } b = 2n + 3.$$

Affirmation : le PGCD de a et b est égal à 7 si et seulement si n est congru à 2 modulo 7.

3. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par :

$$a = 2n^2 + 7n + 21 \text{ et } b = 2n + 2.$$

Affirmation : pour tout entier naturel n , le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement égaux à $n + 2$ et $n + 17$.

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère le point A d'affixe $3 + 4i$. On note s la similitude directe de centre A , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Affirmation : la similitude directe réciproque s^{-1} a pour écriture complexe :

$$z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-1+7i}{2}.$$

5. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 + 2i, b = 4 - i$ et $c = 1 - 2\sqrt{3} + i(3 + \sqrt{3})$ et $d = 4 + \sqrt{3} + 4i\sqrt{3}$.

Affirmation : la similitude directe qui transforme A en C et B en D a pour angle $\frac{\pi}{3}$.