BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2012
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement de Spécialité
Antilles Guyane

EXERCICE 1

Partie A : étude de la fonction

1) Pour tout réel x, $f(x) = xe^{x-1} + 1 = 1 + \frac{1}{e} \times xe^x$. Un théorème de croissances comparées permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$. Par suite,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 + \frac{1}{e} \times 0 = 1.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x-1} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{x-1} + x \times (x-1)'e^{x-1} + 0 = e^{x-1} + xe^{x-1} = (x+1)e^{x-1}.$$

4) Pour tout réel x, $e^{x-1} > 0$. Par suite, pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $x + 1$. Ainsi, la fonction f' est strictement négative sur $]-\infty, -1[$, strictement positive sur $]-1, +\infty[$ et s'annule en -1. On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$1 - e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente

1) Soit $a > 0$. $f(a) = ae^{a-1} + 1$ et $f'(a) = (a+1)e^{a-1}$. Par suite, une équation de la tangente T_a est

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ ou encore $y = (a+1)e^{a-1}(x-a) + ae^{a-1} + 1$ ou enfin $y = (a+1)e^{a-1}x - a^2e^{a-1} + 1$.

$$\boxed{\text{Une équation de } T_a \text{ est } y = (a+1)e^{a-1}x + 1 - a^2e^{a-1}.}$$

2) T_a passe par $O(0, 0)$ si et seulement $0 = (a+1)e^{a-1} \times 0 + 1 - a^2e^{a-1}$ ou encore $1 - a^2e^{a-1} = 0$.

3) $1 - 1^2e^{1-1} = 1 - e^0 = 0$ et donc 1 est une solution de l'équation (E) : $1 - x^2e^{x-1}$ sur $]0, +\infty[$. Montrons que 1 est l'unique solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$,

$$1 - x^2e^{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2e^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{e^{x-1}} \text{ (car } e^{x-1} \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow x^2 = e^{-x+1} \Leftrightarrow x^2 - e^{-x+1} = 0.$$

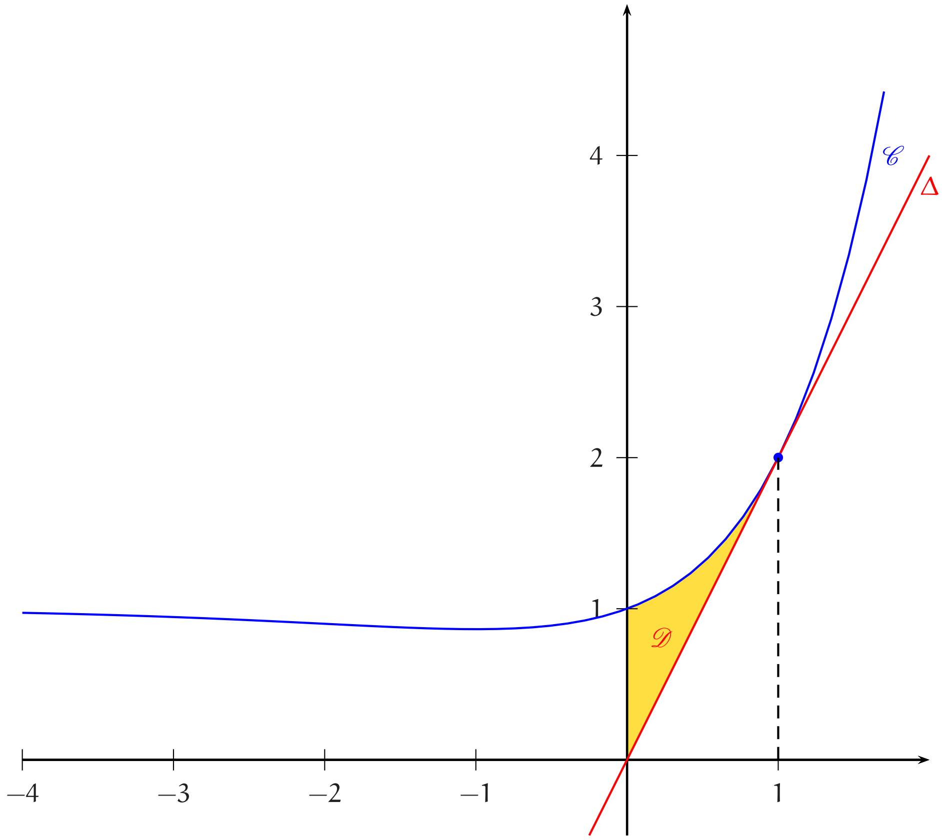
Pour $x > 0$, posons $g(x) = x^2 - e^{-x+1}$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $g'(x) = 2x + e^{-x+1}$. Pour tout réel $x > 0$, $e^{-x+1} > 0$ et $2x > 0$ et donc $g'(x) > 0$. La fonction g est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que pour $x \in]0, 1[$, $g(x) < g(1)$ ou encore $g(x) < 0$ et si $x \in]1, +\infty[$, $g(x) > g(1)$ ou encore $g(x) > 0$. En particulier, si $x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$, $g(x) \neq 0$ puis $1 - x^2e^{x-1} \neq 0$. 1 est donc l'unique solution de l'équation $1 - x^2e^{x-1} = 0$.

4) Si $a = 1$, l'équation obtenue à la question 1) s'écrit $y = 2x$.

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.

Partie C : calcul d'aire

1) Graphique



2) Pour x dans $[0,1]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = e^{x-1}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,1]$ et pour x dans $[0,1]$, on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = e^{x-1} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{x-1} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{x-1}\,dx &= \left[xe^{x-1}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^{x-1}\,dx = 1 \times e^0 - 0 \times e^{-1} - \int_0^1 e^{x-1}\,dx \\ &= 1 - \left[e^{x-1}\right]_0^1 = 1 - \left(1 - e^{-1}\right) = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

3) La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite Δ sur $[0,1]$. Donc l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$ est

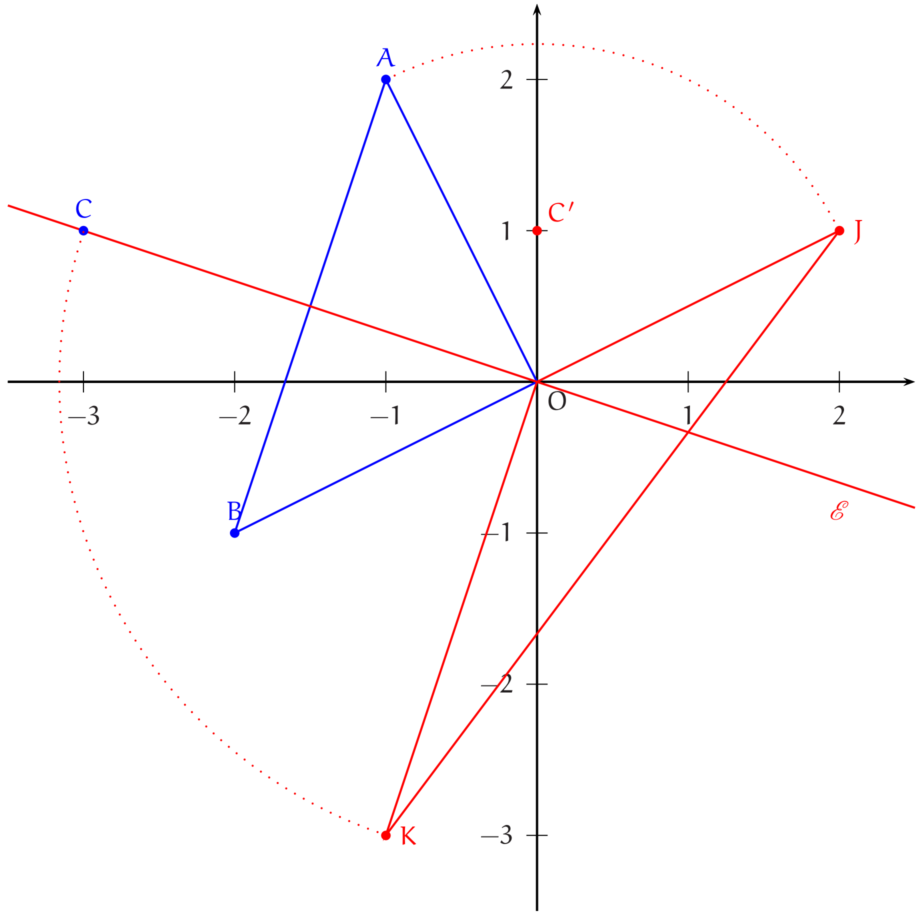
$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^1 (f(x) - 2x)\,dx = \int_0^1 xe^{x-1}\,dx + \int_0^1 (1-2x)\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \frac{1}{e} + \left[x - x^2\right]_0^1 = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'aire, en unités d'aire, du domaine } \mathscr{D} \text{ est égale à } \frac{1}{e}.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.

EXERCICE 2

1) Graphique



2) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{-2-i}{-1+2i} = \dfrac{i(-1+2i)}{-1+2i} = i$. On en déduit que

- $\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{|b|}{|a|} = \left|\dfrac{b}{a}\right| = |i| = 1$ et donc $OA = OB$.
- $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\dfrac{b}{a}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Par suite, le triangle OAB est rectangle isocèle direct en O.

3) a)

$$c' = \frac{-3+i+1-2i}{-3+i+2+i} = \frac{-2-i}{-1+2i} = \frac{(-2-i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{2+4i+i-2}{(-1)^2+2^2} = i.$$

Le point $C' = f(C)$ a donc pour coordonnées $(0, 1)$.

b) Soit M un point du plan distincts de B d'affixe z.

$$\begin{aligned}|z'| = 1 &\Leftrightarrow \frac{|z+1-2i|}{|z+2+i|} = 1 \Leftrightarrow |z-(-1+2i)| = |z-(-2-i)| \text{ (et } z \neq -2-i)\\ &\Leftrightarrow AM = BM \text{ (et } M \neq B) \Leftrightarrow AM = BM \text{ (car si } M = B, \text{ alors } AM \neq BM)\\ &\Leftrightarrow M \in \text{med}[AB].\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ est la médiatrice du segment $[AB]$. On peut en déterminer une équation :

$$\begin{aligned}M \in \text{med}[AB] &\Leftrightarrow AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x+2)^2 + (y+1)^2\\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow 2x + 6y = 0\\ &\Leftrightarrow x + 3y = 0.\end{aligned}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.

L'ensemble $\mathscr{E}$ est la droite d'équation $x + 3y = 0$.

c) $x_O + 3y_O = 0 = 0 = 0$. Donc $O \in \mathscr{E}$. $x_C + 3y_C = -3 + 3 = 0$. Donc $C \in \mathscr{E}$.

4) • $z_J = e^{-i\pi/2} z_A = -i(-1+2i) = 2 + i$ et $z_K = e^{i\pi/2} z_C = i(-3+i) = -1 - 3i$.

• Le milieu L du segment [JK] a pour affixe $z_L = \dfrac{z_J + z_K}{2} = \dfrac{2 + i - 1 - 3i}{2} = \dfrac{1}{2} - i$.

• La médiane issue de O du triangle OJK est la droite (OL). Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OL}$ sont $\left(\dfrac{1}{2}, -1\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-2, -1)$.

$$\overrightarrow{OL}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \times (-2) + (-1) \times (-1) = 0.$$

Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{OL}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux ou encore la droite (OL) est perpendiculaire à la droite (AC). Ainsi, la droite (OL) est également la hauteur issue de O du triangle OAC.

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.

EXERCICE 3

1) • $u_2 = u_{1+1} = \dfrac{1+1}{2\times 1}u_1 = \dfrac{1}{2}$.

• $u_3 = \dfrac{3}{4}u_2 = \dfrac{3}{8}$.

• $u_4 = \dfrac{4}{6}u_3 = \dfrac{4}{6}\times\dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4}$.

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $u_n > 0$.

• $u_1 = \dfrac{1}{2} > 0$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}u_n > 0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $u_n > 0$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $u_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n} \leqslant \frac{n+n}{2n} = 1.$$

Puisque $u_n > 0$, on en déduit encore que $u_{n+1} \leqslant u_n$. On a montré que pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc la suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 et donc la suite (u_n) converge vers un réel positif ou nul.

3) a) $v_1 = \dfrac{u_1}{1} = \dfrac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{2n}u_n = \frac{u_n}{2n} = \frac{1}{2}\times\frac{u_n}{n} = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_1 = \dfrac{1}{2}$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

b) On sait alors que pour tout entier naturel non nul n,

$$v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}.$$

Mais alors, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = nv_n = \dfrac{n}{2^n}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n = \dfrac{n}{2^n}.}$$

4) a) Pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) = x\left(-\ln 2 + \dfrac{\ln x}{x}\right)$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} -\ln 2 + \dfrac{\ln x}{x} = -\ln 2 < 0$. Comme d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(-\ln 2 + \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty.$$

b) On sait déjà que la suite (u_n) converge. Ensuite, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = \frac{n}{2^n} = \frac{e^{\ln n}}{e^{n\ln 2}} = e^{\ln n - n\ln 2} = e^{f(n)}.$$

D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = -\infty$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{f(n)} = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.

EXERCICE 4

1) a) $11 \times 4 - 5 \times 6 = 44 - 30 = 14$ et donc le couple $(x_0, y_0) = (4, 6)$ est une solution de l'équation (E).

b) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$11x - 5y = 14 \Leftrightarrow 11x - 5y = 11x_0 - 5y_0 \Leftrightarrow 11(x - x_0) = 5(y - y_0).$$

Soit (x, y) une solution de (E). Nécessairement l'entier 5 divise l'entier $5(y - y_0) = 11(x - x_0)$. Puisque 5 est premier à 11 (car les entiers 5 et 11 sont des nombres premiers distincts), le théorème de Gauss permet d'affirmer que 5 divise $x - x_0$. Par suite, il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 5k$ ou encore $x = x_0 + 5k$. De même, il existe nécessairement un entier relatif k' tel que $y = y_0 + 11k'$.

Soient alors k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 5k$ et $y = y_0 + 11k'$.

$$11x - 5y = 14 \Leftrightarrow 11(x_0 + 5k) - 5(y_0 + 11k') = 14 \Leftrightarrow 11x_0 - 5y_0 + 5 \times 11 \times (k - k') = 14 \Leftrightarrow 5 \times 11 \times (k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'.$$

Finalement,

$$\boxed{\text{les couples d'entiers relatifs solutions de } (E) \text{ sont les couples de la forme } (4 + 5k, 6 + 11k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}.}$$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $2^3 = 8 = 1 + 7$ et donc $2^3 \equiv 1 \pmod 7$ puis $\left(2^3\right)^n \equiv 1^n \pmod 7$ ou encore $2^{3n} \equiv 1 \pmod 7$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ 2^{3n} \equiv 1 \pmod 7.}$$

b) $2011 = 287 \times 7 + 2$ et donc $2011 \equiv 2 \pmod 7$ puis $2011^{2012} \equiv 2^{2012} \pmod 7$.

$2012 = 3 \times 670 + 2$ et donc $2^{2012} = 2^2 \times 2^{3 \times 670}$. La question a) permet alors d'écrire que $2^{2012} \equiv 2^2 \times 1 \pmod 7$ ou encore $2^{2012} \equiv 4 \pmod 7$. Finalement, $2011^{2012} \equiv 4 \pmod 7$. Comme $0 \leqslant 4 < 7$, on a montré que

$$\boxed{\text{Le reste de la division euclidienne de } 2011^{2012} \text{ par 7 est 4.}}$$

3) L'expression complexe de f est de la forme $z' = \alpha z + \beta$ où α et β sont deux nombres complexes tels que $\alpha \neq 0$. Donc f est une similitude directe.

• $\alpha = \dfrac{3}{2}(1 - i) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/4}$.

On sait alors que f est une similitude directe de rapport $|\alpha| = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\arg(\alpha) = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

• Le centre Ω de f est l'unique point invariant par f. Soit z un nombre complexe.

$$\begin{aligned} z' = z &\Leftrightarrow \frac{3}{2}(1 - i)z + 4 - 2i = z \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)z = -4 + 2i \Leftrightarrow (1 - 3i)z = -8 + 4i \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-8 + 4i}{1 - 3i} \Leftrightarrow z = \frac{(-8 + 4i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} \Leftrightarrow z = \frac{-8 - 24i + 4i - 12}{1^2 + (-3)^2} \Leftrightarrow z = -2 - 2i \end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ est la similitude directe de centre } \Omega(-2, -2), \text{ de rapport } k = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ et d'angle } \theta = -\frac{\pi}{4}.}$$

4) $\sqrt{12} = 3,4\ldots$.

• Etape 1. $\dfrac{12}{1} - \mathrm{Ent}\left(\dfrac{12}{1}\right) = 0$. Donc l'algorithme affiche : 1 et 12 puis $N = 2$.

• Etape 2. $2 \leqslant \sqrt{12}$ et $\dfrac{12}{2} - \mathrm{Ent}\left(\dfrac{12}{2}\right) = 0$. Donc l'algorithme affiche : 2 et 6 puis $N = 3$.

• Etape 3. $3 \leqslant \sqrt{12}$ et $\dfrac{12}{3} - \mathrm{Ent}\left(\dfrac{12}{3}\right) = 0$. Donc l'algorithme affiche : 3 et 4 puis $N = 4$.

• Etape 4. $4 > \sqrt{12}$. Donc l'algorithme s'arrête.

Au bout du compte, l'algorithme affiche

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.

$$\begin{array}{cc} 1 & 12 \\ 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{array}$$

c'est-à-dire la liste des diviseurs de 12. De manière générale,

$$\boxed{\text{l'algorithme donne la liste de tous les diviseurs d'un entier donné.}}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2012. Tous droits réservés.