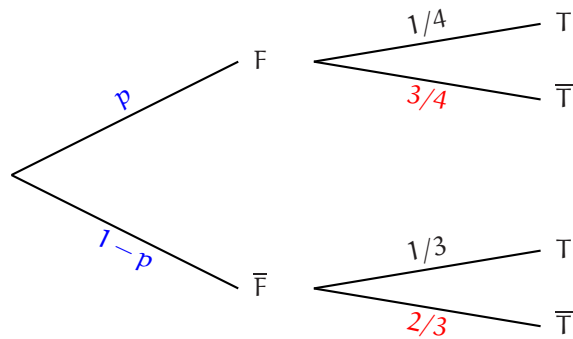


EXERCICE 1

Partie A

1) L'énoncé fournit $p_F(T) = \frac{1}{4}$, $p_{\bar{F}}(T) = \frac{1}{3}$ et $p(T) = \frac{3}{10}$. Posons $p = p(F)$. Représentons la situation par un arbre :



La formule des probabilités totales fournit :

$$p(T) = p(F \cap T) + p(\bar{F} \cap T) = p(F) \times p_F(T) + p(\bar{F}) \times p_{\bar{F}}(T),$$

et donc $\frac{1}{4}p + \frac{1}{3}(1-p) = \frac{3}{10}$ puis $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)p = \frac{1}{3} - \frac{3}{10}$ puis $\frac{p}{12} = \frac{1}{30}$ et finalement

$$p(F) = \frac{12}{30} = \frac{2 \times 6}{5 \times 6} = \frac{2}{5}.$$

$p(F) = \frac{2}{5}.$

2) La probabilité demandée est $p_T(F)$.

$$p_T(F) = \frac{p(F \cap T)}{p(T)} = \frac{p(F) \times p_F(T)}{p(T)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{3} = \frac{1}{3}.$$

$p_T(F) = \frac{1}{3}.$

Partie B

1) a) Notons Y le nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les membres choisis. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le membre choisi adhère à la section tennis » avec une probabilité $p = \frac{3}{10}$ ou « le membre choisi n'adhère pas à la section tennis » avec une probabilité $1 - p = \frac{7}{10}$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{3}{10}$.

La probabilité demandée est $p(Y = 2)$ et on sait que

$$p(Y = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{3^2 \times 7^2}{10^4} = \frac{2646}{10^4} = 0,2646.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remplace 4 par n et on obtient pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$,

$$p(Y = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{n-k}.$$

Par suite,

$$p_n = p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \left(\frac{3}{10}\right)^n \left(\frac{7}{10}\right)^n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} p_n \geq 0,99 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{10}\right)^n \leq 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{10}{7}\right)^n \geq 100 \\ &\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{10}{7}\right) \Leftrightarrow \ln(100) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n \Leftrightarrow \frac{\ln(100)}{\ln\left(\frac{10}{7}\right)} \Leftrightarrow n \geq 12,9\dots \\ &\Leftrightarrow n \geq 13 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

Le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geq 0,99$ est 13.

2) La variable aléatoire X prend trois valeurs : $35 = 40 - 5$ quand le joueur tire deux jetons gagnants, $15 = 20 - 5$ quand le joueur tire un jeton gagnant et -5 quand le joueur ne tire aucun jeton gagnant.

- La probabilité de tirer deux jetons gagnants est $\frac{\binom{10}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{\frac{10 \times 9}{2}}{\frac{100 \times 99}{2}} = \frac{10 \times 9}{10 \times 10 \times 9 \times 11} = \frac{1}{110}$.
- La probabilité de tirer un jeton gagnant est $\frac{\binom{10}{1} \times \binom{90}{1}}{\binom{100}{2}} = \frac{10 \times 90}{\frac{100 \times 99}{2}} = \frac{20}{110}$.
- La probabilité de ne tirer aucun jeton gagnant est $\frac{\binom{90}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{\frac{90 \times 89}{2}}{\frac{100 \times 99}{2}} = \frac{90 \times 89}{100 \times 99} = \frac{89}{110}$.

Donnons la loi de probabilité de X dans un tableau :

x_i	35	15	-5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{110}$	$\frac{20}{110}$	$\frac{89}{110}$

b) L'espérance mathématique de X est

$$E(X) = 35 \times \frac{1}{110} + 15 \times \frac{20}{110} - 5 \times \frac{89}{110} = \frac{35 + 300 - 445}{110} = -1.$$

Le gain algébrique moyen à cette loterie est -1 € ou encore en moyenne, le joueur perd 1 euro par partie jouée. Le gain algébrique est strictement négatif et donc le jeu est défavorable au joueur.

EXERCICE 2

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Pour $x > 0$, on pose $t = \ln(x)$ ou encore $x = e^t$ de sorte que x tend vers $+\infty$ si et seulement si t tend vers $+\infty$. On obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^t)}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t/t} = 0,$$

car $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$.

Partie B

1) Soit $x \geq 1$. Alors, $x^2 - 1 \geq 0$ et $\ln(x) \geq 0$ puis $g(x) \geq 0$.

2) a) La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$. Mais alors la fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $]1, +\infty[$ et pour $x \geq 1$,

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b) Pour tout $x \geq 1$, $x^2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. Le signe de la fonction g a été étudié à la question 1) et on en déduit que la fonction f' est positive sur $]1, +\infty[$ puis que

la fonction f est croissante sur $]1, +\infty[$.

c) Pour tout $x \geq 1$, $f(x) - x = -\frac{\ln(x)}{x}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$. On en déduit que

la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

d) Soit $x \geq 1$. Soient M le point de (C) d'abscisse x et N le point de (D) de même abscisse x .

$$y_M - y_N = f(x) - x = \left(x - \frac{\ln(x)}{x}\right) - x = -\frac{\ln(x)}{x}.$$

Puisque $x \geq 1$, $y_M - y_N$ est du signe de $-\ln(x)$. Par suite, pour tout $x > 1$, $y_M - y_N < 0$ et pour $x = 1$, $y_M - y_N = 0$. Ainsi, (C) est strictement au-dessous de (D) sur $]1, +\infty[$ et (C) et (D) se coupent au point de coordonnées (1, 1).

3) a) Soit $k \geq 2$.

$$M_k N_k = \sqrt{(x_{N_k} - x_{M_k})^2 + (y_{N_k} - y_{M_k})^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{\ln k}{k}\right)^2} = \left|\frac{\ln(k)}{k}\right| = \frac{\ln(k)}{k} \text{ (car } k \geq 2\text{)}.$$

b) Algorithme.

Variables		k est une variable du type entier
Initialisation		$k := 2$
Traitement		Tant que $\ln(k)/k > 10^{-2}$, Début du tant que Ajouter 1 à k FinTantQue
Sortie		Afficher k .

EXERCICE 3

Partie A

1) La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout réel x de $[0, 1]$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. La dérivée f' de f est strictement positive sur $[0, 1]$ et donc f est strictement croissante sur $[0, 1]$.

2) a) La fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Ensuite, pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\tan(0) \leq \tan(x) \leq \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (car la fonction tangente est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$) ou encore $0 \leq \tan(x) \leq 1$. La fonction f étant dérivable sur $[0, 1]$, on en déduit que la fonction $g = f \circ \tan$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,

$$g'(x) = \tan'(x) \times f'(\tan(x)) = (1 + \tan^2(x)) \times \frac{1}{1 + (\tan(x))^2} = 1.$$

b) La fonction g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = 1$. Par suite, il existe un réel C tel que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x + C$. Pour $x = 0$, on obtient

$$0 + C = g(0) = f(\tan(0)) = f(0) = 0,$$

et donc $C = 0$. Ceci montre que pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x$. En particulier,

$$f(1) = f\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

3) Soit $x \in [0, 1]$. Puisque la fonction f est croissante sur $[0, 1]$, on a $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ ou encore $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$.

Partie B

1) Pour x dans $[0, 1]$, posons $u(x) = f(x)$ et $v(x) = x$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x dans $[0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) & v(x) &= x \\ u'(x) &= -\frac{1}{1+x^2} & v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 f(x) \times 1 \, dx = [f(x) \times x]_0^1 - \int_0^1 f'(x) \times x \, dx = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} \times f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0 \times f(0) - \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln(2) - \ln(1)) \quad (f(0) = 0 \text{ par définition et } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ d'après la question A.2)b)) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2). \end{aligned}$$

$$I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2).$$

2) a) Soit n un entier naturel non nul. D'après la question A.3), pour tout réel $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq 0$. D'autre part, pour tout réel $x \in [0, 1]$, $x^n \geq 0$ et finalement, pour tout réel x de $[0, 1]$, $f(x) = x^n f(x) \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^1 x^n f(x) \, dx \geq 0$. On a montré que

$$\text{pour tout entier naturel non nul } n, I_n \geq 0.$$

b) Soit n un entier naturel non nul. D'après la question A.3), pour tout réel $x \in [0, 1]$, $f(x) \leq \frac{\pi}{4}$. On en déduit que pour tout réel $x \in [0, 1]$, $x^n f(x) \leq \frac{\pi}{4} x^n$ (car pour tout réel $x \in [0, 1]$, $x^n \geq 0$). Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x) \, dx \leq \int_0^1 \frac{\pi}{4} x^n \, dx = \frac{\pi}{4} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \times \frac{1^{n+1}}{n+1} = \frac{\pi}{4(n+1)}.$$

$$\text{Pour tout entier naturel non nul } n, I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}.$$

c) D'après les deux questions précédentes, pour tout entier naturel non nul n , $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4(n+1)} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

EXERCICE 4

1) Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z .

$$f(M) = M \Leftrightarrow z^2 = z \Leftrightarrow z(z-1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 1 \Leftrightarrow M = O \text{ ou } M = \Omega.$$

$$\Gamma_1 = \{O, \Omega\}.$$

2) a) $|a| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$ puis

$$a = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = 2e^{-i\pi/4}.$$

$$a = 2e^{-i\pi/4}.$$

b) $f(O) = O$ et donc $f(O) \neq A$. Soit M un point du plan distinct de O d'affixe $z \neq 0$.

$$\begin{aligned} f(M) = A &\Leftrightarrow z^2 = a \Leftrightarrow |z^2| = |a| \text{ et il existe un entier relatif } k \text{ tel que } \arg(z^2) = \arg(a) + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow |z|^2 = 2 \text{ et il existe un entier relatif } k \text{ tel que } 2\arg(z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow |z| = \sqrt{2} \text{ et il existe un entier relatif } k \text{ tel que } \arg(z) = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt{2}e^{-i\pi/8} \text{ ou } z = -\sqrt{2}e^{-i\pi/8} \text{ (car bien sûr, } z^2 = a \Leftrightarrow (-z)^2 = a). \end{aligned}$$

Les affixes des deux antécédents du point A sont $\sqrt{2}e^{-i\pi/8}$ et $-\sqrt{2}e^{-i\pi/8}$.

3) Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$z' = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Par suite,

$$z' \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow y = x \text{ ou } y = -x.$$

$$\Gamma_2 \text{ est la réunion des deux droites d'équations respectives } y = x \text{ et } y = -x.$$

4) (a) L'expression complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est $z' = 1 + e^{i\pi/2}(z-1)$ ou encore $z' = 1 + i(z-1)$ ou enfin $z' = iz + 1 - i$.

Soit M un point du plan distinct de Ω dont l'affixe est notée z ($z \neq 1$).

$$\begin{aligned} \Omega MM' \text{ rectangle isocèle direct en } \Omega &\Leftrightarrow \Omega M = \Omega M' \text{ et } \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ (et } M \neq \Omega) \\ &\Leftrightarrow r(M) = M' \text{ (et } M \neq \Omega) \\ &\Leftrightarrow z^2 = iz + 1 - i \text{ (et } z \neq 1) \\ &\Leftrightarrow z^2 - iz - 1 + i = 0 \text{ (et } z \neq 1). \end{aligned}$$

(b) Soit z un nombre complexe.

$$(z-1)(z+1-i) = z^2 - z + (1-i)z - (1-i) = z^2 - iz - 1 + i.$$

c) Soit M un point du plan distinct de Ω dont l'affixe est notée z . D'après les deux questions précédentes

$$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow z^2 - iz - 1 + i = 0 \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow (z-1)(z+1-i) = 0 \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow z = -1 + i.$$

$$\Gamma_3 = \{B\} \text{ où } z_B = -1 + i.$$

5) a) Soit M un point du plan dont l'affixe z est différente de 0 et de 1.

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg\left(\frac{z' - 0}{z - 0}\right) = \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z) [2\pi].$$

b) Soit M un point du plan distinct de O et de Ω . Alors $M \neq O$, $M' \neq O$ et enfin, d'après la question 1), $M' \neq M$. En résumé, les points O , M et M' sont deux à deux distincts. Ensuite,

$$O, M \text{ et } M' \text{ alignés} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0 [\pi] \Leftrightarrow \arg(z) = 0 [\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ (et } z \notin \{0, 1\}).$$

Γ_4 est l'axe (Ox) privé des points O et Ω .