BACCALAUREAT GENERAL

Session de mai 2012

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Liban

EXERCICE 1

Partie A

1) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x}.$$

Pour tout réel $x > 0$, $g'(x)$ est strictement positif. Par suite, la fonction g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2) • $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (2x^3 - 1) = -1$ et on sait d'autre part que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$ et donc que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 2\ln x = -\infty$. En additionnant, on obtient

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = -\infty.$$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 - 1 = +\infty$ et on sait d'autre part que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et donc que $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln x = +\infty$. En additionnant, on obtient

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

• La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $\left]\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x), \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)\right[=]-\infty, +\infty[$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule dans $]0, +\infty[$. En particulier, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule, notée α, dans $]0, +\infty[$.

La calculatrice fournit $g(0,864) = -0,002\ldots < 0$ et $g(0,865) = 0,004\ldots > 0$. Ainsi, $g(0,864) < g(\alpha) < g(0,865)$. Puisque la fonction g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $0,864 < \alpha < 0,865$ puis que

$$\boxed{\alpha = 0,86 \text{ arrondi au centième.}}$$

3) Soit $x \in]0, +\infty[$. Si $x < \alpha$, alors $g(x) < g(\alpha)$ puisque la fonction g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ ou encore $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, alors $g(x) > g(\alpha)$ ou encore $g(x) > 0$. On a ainsi montré que

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement négative sur }]0, \alpha[, \text{ strictement positive sur }]\alpha, +\infty[\text{ et s'annule en } \alpha.}$$

Partie B

1) • **Limite en 0.** On sait que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$ puis $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} -\frac{\ln x}{x^2} = +\infty$. Comme d'autre part, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 2x = 0$, en additionnant on obtient

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty.}$$

• **Limite en $+\infty$.** D'après un théorème de croissances comparées, on sait que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$. D'autre part, $\lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$. En retranchant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

2) • Pour tout réel $x > 0$, $f(x) - 2x = -\frac{\ln x}{x^2}$. D'après la question précédente, on en déduit que $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } y = 2x \text{ est asymptote à la courbe } \mathscr{C} \text{ en } +\infty.}$$

• Soit $x > 0$. Soient M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N le point de Δ de même abscisse x.

$$y_M - y_N = f(x) - 2x = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

- Si $x > 1$, $\ln x > 0$ et donc $y_M - y_N < 0$. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de la droite Δ sur $]1, +\infty[$.

- Si $x < 1$, $\ln x < 0$ et donc $y_M - y_N > 0$. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de la droite Δ sur $]0, 1[$.

- Enfin, si $x = 1$, $y_M = y_N = 2y_M = 2$. La courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ se coupent au point de coordonnées $(1, 2)$.

3) La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. Mais alors la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = 2 - \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = 2 - \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = 2 - \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = \frac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} \\ &= \frac{g(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

Comme pour tout réel $x > 0$, on a $x^3 > 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$ pour tout réel $x > 0$.

4) Le signe de la fonction g a été étudié à la question 3) de la partie A. On en déduit le tableau de variation de la fonction f :

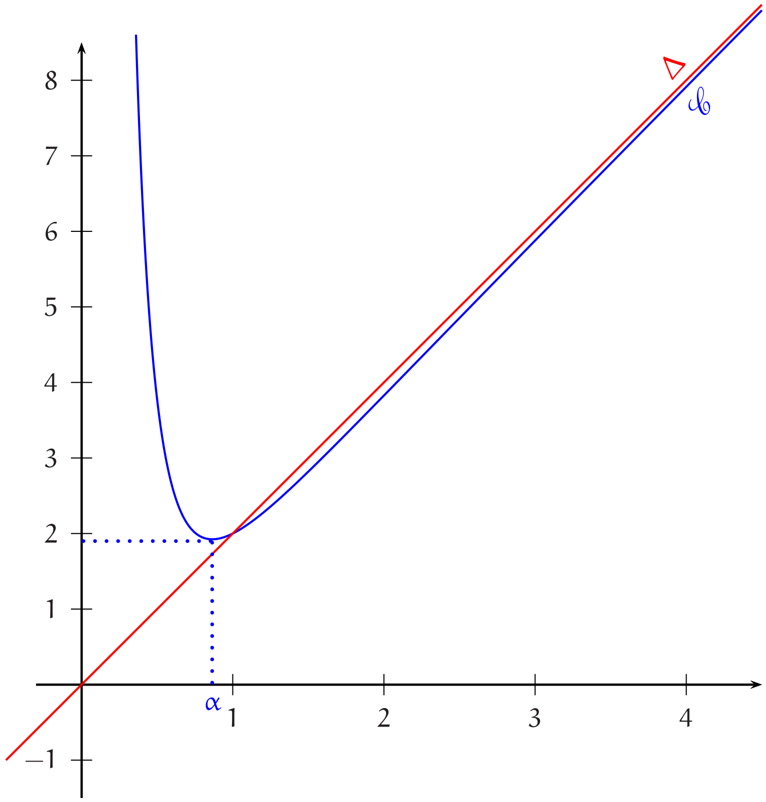
x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$	

5) Représentation graphique. Voir page suivante.

Partie C

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 2) de la partie B, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la droite Δ sur $[1, +\infty[$ et en particulier sur $[1, n]$. Puisque la fonction f et la fonction $x \mapsto 2x$ sont continues sur $[1, n]$, on sait que l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine considéré est $\int_1^n (2x - f(x))\, dx$ ou encore $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.
Maintenant, une unité d'aire mesure $2 \times 1 = 2$ cm^2 et donc l'aire, exprimée en cm^2, du domaine considéré est

$$I_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\, dx.$$



2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour x dans $[1, n]$, posons $u(x) = \ln x$ et $v(x) = -\dfrac{1}{x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1, n]$ et pour x dans $[1, n]$, on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln x & v(x) = -\dfrac{1}{x} \\ u'(x) = -\dfrac{1}{x} & v'(x) = \dfrac{1}{x^2} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[1, n]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx &= \int_1^n \ln x \times \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \left[\ln x \times \left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^n - \int_1^n \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x}\right)\,dx = -\frac{\ln n}{n} - \left(-\frac{\ln 1}{1}\right) + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= -\frac{\ln n}{n} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = -\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{1} \\ &= 1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

b) On en déduit que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ I_n = 2\left(1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}\right).}$$

3) On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et d'autre part, d'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$. Par suite,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 2.}$$

EXERCICE 2

Proposition 1.	**VRAI**
Proposition 2.	**VRAI**
Proposition 3.	**FAUX**
Proposition 4.	**VRAI**

Justification 1. Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_1$ est le vecteur $\overrightarrow{u}_1$ de coordonnées $(1, 2, -1)$ et un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_2$ est le vecteur $\overrightarrow{u}_2$ de coordonnées $(5, -2, 1)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ ne sont pas colinéaires car s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u}_2 = k\overrightarrow{u}_1$ alors $k = 5$ et aussi $2k = -2$ ou encore $k = -1$ ce qui est impossible.
Donc les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas parallèles ou encore les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes (et dans ce cas coplanaires) ou non coplanaires (et dans ce cas n'ont aucun point commun).

Soient $M_1(4 + t, 6 + 2t, 4 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}_1$ et $M_2(8 + 5t', 2 - 2t', 6 + t')$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}_2$.

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4 + t = 8 + 5t' \\ 6 + 2t = 2 - 2t' \\ 4 - t = 6 + t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4 + 5t' \\ 6 + 2(4 + 5t') = 2 - 2t' \\ 4 - (4 + 5t') = 6 + t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4 + 5t' \\ 12t' = -12 \\ -6t' = 6 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4 + 5t' \\ t' = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = -1 \\ t = -1 \end{array}\right.$$

Pour $t = -1$ (ou $t' = -1$), on obtient le point de coordonnées $(3, 4, 5)$. Ainsi, le point de coordonnées $(3, 4, 5)$ appartient à la droite $\mathscr{D}_1$ et à la droite $\mathscr{D}_2$. On en déduit que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et en particulier ces droites sont coplanaires.

L'affirmation 1 est vraie.

Justification 2. $3x_B + 2y_B - 5z_B = 3 \times 3 + 2 \times 1 - 5 \times 2 = 1$. Donc le point B appartient au plan $\mathscr{P}$.
Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(3, 2, -5)$ et le vecteur $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $(9, 6, -15)$. On remarque alors que $\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{n}$. Par suite, le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ ou encore la droite (AB) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

En résumé, la droite (AB) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ et le point B appartient au plan $\mathscr{P}$. Par suite, le point B est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

L'affirmation 2 est vraie.

Justification 3. Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \dfrac{n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{n\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)} = \dfrac{1 + \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{2}{n}}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
D'autre part, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n + 2} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$. Ainsi, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers des limites différentes et en particulier ces deux suites ne sont pas adjancentes.

L'affirmation 3 est fausse.

Justification 4 Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 3$.

• $u_0 = 1 \leqslant 3$ et donc l'inégalité est vraie quand $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \leqslant 3$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \leqslant \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3.$$

Le résultat est démontré par récurrence. La suite (u_n) est donc majorée par 3 et l'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 3

1) Quand l'événement J_1 est réalisé, on doit tirer une boule de l'urne U_2. Puisque l'urne U_2 contient 10 boules dont 4, sont blanches,

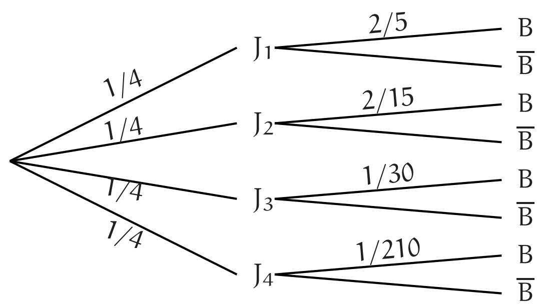
$$p_{J_1}(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Quand l'événement J_2 est réalisé, on doit tirer deux boules de l'urne U_2. Il y a $\binom{10}{2}$ tirages simultanés de 2 boules parmi les 10 de l'urne U_2 et parmi ces tirages, il y a $\binom{4}{2}$ tirages simultanés de deux boules parmi les 4 blanches. Donc

$$p_{J_2}(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{4\times 3}{2}}{\frac{10\times 9}{2}} = \frac{4\times 3}{10\times 9} = \frac{2}{5\times 3} = \frac{2}{15}.$$

$$\boxed{p_{J_1}(B) = \frac{2}{5},\ p_{J_2}(B) = \frac{2}{15},\ p_{J_3}(B) = \frac{1}{30} \text{ et } p_{J_4}(B) = \frac{1}{210}.}$$

2) Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} p(B) &= p(J_1)\times p_{J_1}(B) + p(J_2)\times p_{J_2}(B) + p(J_3)\times p_{J_3}(B) + p(J_4)\times p_{J_4}(B) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{15}+\frac{1}{30}+\frac{1}{210}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{84+28+7+1}{210} = \frac{120}{4\times 210}\frac{4\times 30}{4\times 30\times 7} = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(B) = \frac{1}{7}.}$$

3) La probabilité demandée est $p_B(J_3)$.

$$p_B(J_3) = \frac{p(J_3\cap B)}{p(B)} = \frac{p(J_3)\times p_{J_3}(B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{30}}{\frac{1}{7}} = \frac{7}{120}.$$

$$\boxed{p_B(J_3) = \frac{7}{120}.}$$

4) a) La variable aléatoire N est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « toutes les boules tirées sont blanches » avec une probabilité $p = \frac{1}{7}$ (d'après la question 2)) ou « au moins une boule tirée n'est pas blanche » avec une probabilité $1 - p = \frac{6}{7}$.

La variable aléatoire N suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{7}$.

On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 10$,

$$p(X=k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{7}\right)^k\left(\frac{6}{7}\right)^{10-k}.$$

b) D'après la question précédente,

$$p(N=3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^3\left(\frac{6}{7}\right)^7 = 0,118\ldots,$$

et donc

$$\boxed{p(N=3) = 0,12 \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

EXERCICE 4

1) Un triangle.

a) $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}}{2-3-i\sqrt{3}} = \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \dfrac{-i\sqrt{3}(-1-i\sqrt{3})}{-1-i\sqrt{3}} = -i\sqrt{3}$. Maintenant, on sait que

$$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right) = \arg\left(-i\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

(car $-i\sqrt{3}$ est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement négative). En particulier,

$$\boxed{\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{2}.}$$

b) Ainsi, le triangle ABC est rectangle en B. On en déduit que $[AC]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC ou encore le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu du segment $[AC]$. Ainsi,

$$\omega = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}.$$

$$\boxed{\text{le centre du cercle circonscrit au triangle } ABC \text{ est le point } \Omega \text{ d'affixe } \omega = 1+i\sqrt{3}.}$$

2) Une transformation du plan.

a) • $z_1 = 0 + 2 = 2$.

• $z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \times 2 + 2 = 1 + i\sqrt{3} + 2 = 3 + i\sqrt{3}$.

• $z_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(3+i\sqrt{3}) + 2 = \dfrac{3+i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}-3}{2} + 2 = 2 + \dfrac{4i\sqrt{3}}{2} = 2 + 2i\sqrt{3}$.

• $z_4 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(2+2i\sqrt{3}) + 2 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^2 + 2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 + 2 = 2i\sqrt{3}$.

b) • $A_1A_2 = ||z_2 - z_1| = \left|3+i\sqrt{3}-2\right| = \left|1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$.

• $A_2A_3 = ||z_3 - z_2| = \left|2+2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}\right| = \left|-1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$.

• $A_3A_4 = ||z_4 - z_3| = \left|2i\sqrt{3}-2-2i\sqrt{3}\right| = |-2| = 2$.

$$\boxed{A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = 2.}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega) + \omega &= \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n - \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3}) + (1+i\sqrt{3}) = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n - \dfrac{1+2i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2}{2} + 1 + i\sqrt{3} \\ &= \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n - \dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2} + 1 + i\sqrt{3} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 1 - i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 2 \\ &= z_{n+1},\end{aligned}$$

et donc $z_{n+1} - \omega = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ z_{n+1} - \omega = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega).}$$

d) Soit r la transformation du plan d'expression complexe $z' = \omega + \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z - \omega)$.

$$\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = e^{i\pi/3},$$

et donc r est la transformation d'expression complexe $z' = \omega + e^{i\pi/3}(z - \omega)$. On sait que r est la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ A_{n+1} = r(A_n) \text{ où } r \text{ est la rotation de centre } \Omega \text{ et d'angle } \dfrac{\pi}{3}.}$$

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\Omega A_{n+6} = \Omega A_{n+5} = \ldots = \Omega A_{n+1} = \Omega A_n$. D'autre part, d'après la relation de CHALES,

$$\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+6}}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}, \overrightarrow{\Omega A_{n+2}}\right) + \ldots + \left(\overrightarrow{\Omega A_{n+5}}, \overrightarrow{\Omega A_{n+6}}\right) = 6 \times \frac{\pi}{3}\ [2\pi],$$

et donc $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+6}}\right) = 0\ [2\pi]$. En résumé, $\Omega A_n = \Omega A_{n+6}$ et $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+6}}\right) = 0\ [2\pi]$. On en déduit que $\overrightarrow{\Omega A_n} = \overrightarrow{\Omega A_{n+6}}$ puis que $A_{n+6} = A_n$.

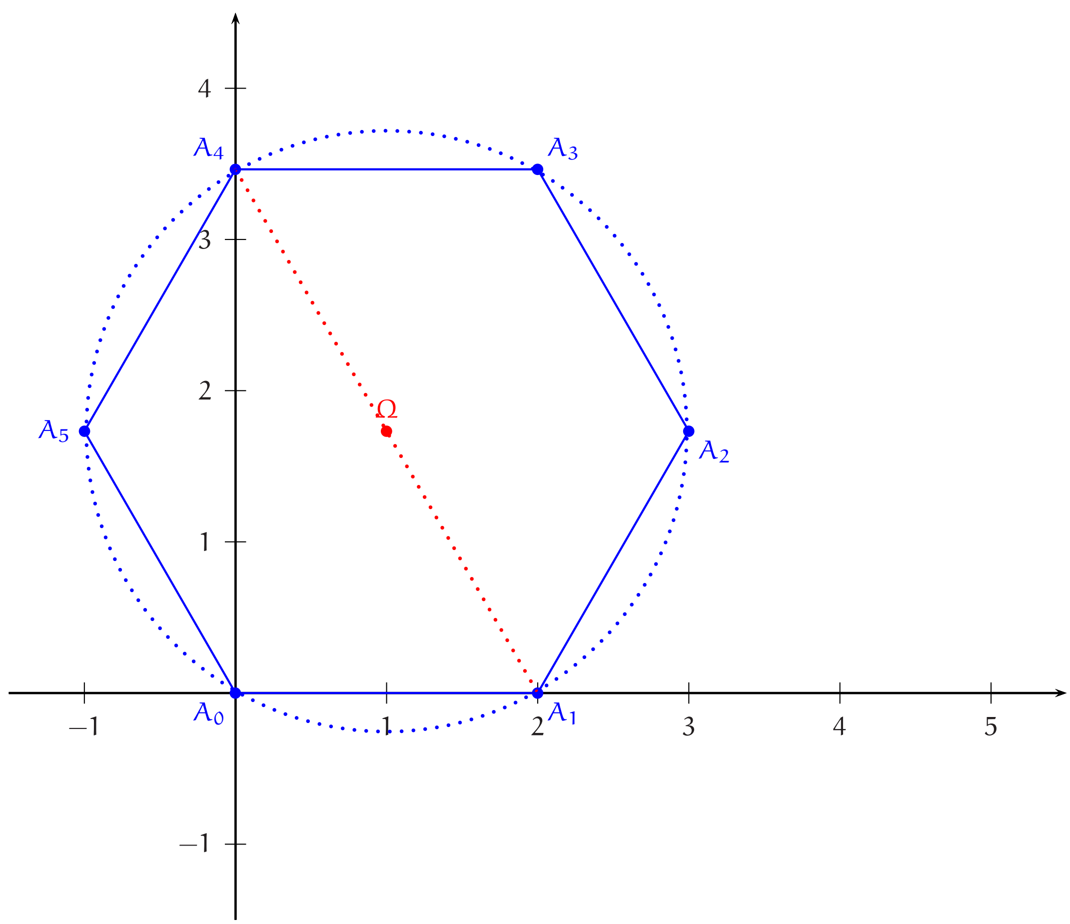
$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ A_{n+6} = A_n.}$$

On en déduit en particulier que pour tout entier naturel n, $A_{6(n+1)} = A_{6n+6} = A_{6n}$. Donc la suite $(A_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ou encore, pour tout entier naturel n, $A_{6n} = A_0$.

Maintenant, $2012 = 6 \times 335 + 2$ et d'après ce qui précède $A_{2010} = A_{6\times 335} = A_0$. Donc

$$A_{2012} = r\left(r\left(A_{2010}\right)\right) = r\left(r\left(A_0\right)\right) = A_2.$$

$$\boxed{z_{2012} = z_2 = 3 + i\sqrt{3}.}$$



3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $r(A_n) = A_{n+1}$ et que r est la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, on a $\Omega A_n = \Omega A_{n+1}$ et $\widehat{A_n\Omega A_{n+1}} = \dfrac{\pi}{3}$. Par suite, le triangle $A_n\Omega A_{n+1}$ est isocèle en Ω et a ses trois angles égaux à $\dfrac{\pi}{3}$. Finalement, le triangle $A_n\Omega A_{n+1}$ est équilatéral. On en déduit que $A_nA_{n+1} = \Omega A_n$.

Ensuite, pour tout entier naturel n, $\Omega A_{n+1} = \Omega A_n$, et donc la suite $(\Omega A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Par suite, pour tout entier naturel n

$$A_nA_{n+1} = \Omega A_n = \Omega A_0 = |z_0 - \omega| = |-\omega| = |\omega| = \sqrt{1^1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ A_nA_{n+1} = 2.}$$

