BACCALAUREAT GENERAL

Session de mai 2012
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
France métropolitaine

EXERCICE 1

1) **VRAI**

2) **VRAI**

3) **FAUX**

4) **VRAI**

1) La courbe représentative de la fonction f' est au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-3, -1]$ ou encore, pour tout réel x de $[-3, -1]$, on a $f'(x) \leqslant 0$. L'affirmation de cette question 1) est donc vraie.

2) D'après le graphique fourni dans l'énoncé, la fonction f' est positive sur l'intervalle $[-1, 2]$. Donc la fonction f est croissante sur $[-1, 2]$. L'affirmation de cette question 2) est vraie.

3) La dérivée f' de f est strictement positive sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. En particulier, $f\left(-\frac{1}{2}\right) < f(0)$ ou encore $f\left(-\frac{1}{2}\right) < -1$. Ainsi, il existe un réel x_0 de $[-2, 3]$ tel que $f(x_0) < -1$ et donc l'affirmation de cette question 3) est fausse.

4) Une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0 est

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

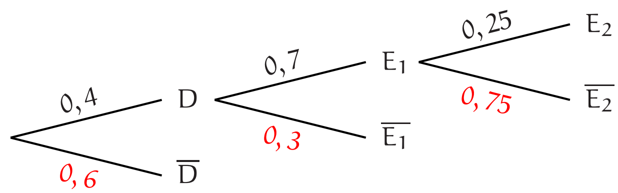
L'énoncé fournit $f(0) = -1$ et sur le graphique, on lit que $f'(0) = 1$. Une équation de (T) est donc

$$y = x - 1.$$

Soit A le point de coordonnées $(1, 0)$. $x_A - 1 = 1 - 1 = 0 = y_A$ et donc le point A appartient à (T). L'affirmation de cette question 4) est donc vraie.

EXERCICE 2

1) a) Représentons la situation par un arbre.



b) $p(E_1) = p(D \cap E_1) = p(D) \times p_D(E_1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.

$$\boxed{p(E_1) = 0,28.}$$

c) 1ère solution. L'événement F est la réunion des trois événements $\overline{D}$, $\overline{E_1}$ et $\overline{E_2}$. De plus, ces événements sont deux à deux incompatibles. Donc,

$$p(F) = p\left(\overline{D}\right) + p\left(\overline{E_1}\right) + p\left(\overline{E_2}\right).$$

- $p\left(\overline{D}\right) = 1 - p(D) = 1 - 0,4 = 0,6$.
- $p\left(\overline{E_1}\right) = p_D\left(\overline{E_1}\right) \times p(D) = (1 - 0,7) \times 0,4 = 0,12$.
- $p\left(\overline{E_2}\right) = p_{E_1}\left(\overline{E_2}\right) \times p(E_1) = (1 - 0,25) \times 0,28 = 0,21$.

$$p(F) = p\left(\overline{D}\right) + p\left(\overline{E_1}\right) + p\left(\overline{E_2}\right) = 0,6 + 0,12 + 0,21 = 0,93.$$

2ème solution. L'événement $\overline{F}$ c'est-à-dire l'événement « le candidat est recruté » est encore l'événement E_2. Donc,

$$p\left(\overline{F}\right) = p(E_2) = p(E_1) \times p_{E_1}(E_2) = 0,28 \times 0,25 = 0,07$$

puis $p(F) = 1 - p\left(\overline{F}\right) = 1 - 0,07 = 0,93$.

$$\boxed{p(F) = 0,93.}$$

2) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le candida t est recruté » avec une probabilité $p = 0,07$ ou « le candidat n'est pas recruté » avec une probabilité $1 - p = 0,93$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,07$.

b) On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 5$,

$$p(X = k) = \binom{5}{k} (0,07)^k (0,93)^{5-k}.$$

La probabilité demandée est $p(X = 2)$.

$$p(X = 2) = \binom{5}{2} (0,07)^2 (0,93)^3 = \frac{5 \times 4}{2} \times 0,07^2 \times 0,93^3 = 0,0394\ldots,$$

et donc

$$\boxed{\text{la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés est } 0,039 \text{ arrondie à } 10^{-3}.}$$

3) Soit n le nombre de dossiers examinés par le cabinet de recrutement. On note toujours X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les n candidats. La probabilité d'embaucher au moins un candidat est $p(X \geqslant 1)$.

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}(0,07)^0(0,93)^n = 1 - (0,93)^n.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
p\,(X \geqslant 1) \geqslant 0,999 &\Leftrightarrow 1 - (0,93)^n \geqslant 0,999 \Leftrightarrow (0,93)^n \leqslant 0,001 \\
&\Leftrightarrow \ln\left((0,93)^n\right) \leqslant \ln(0,001) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,93) \leqslant \ln(0,001) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,93)} \text{ (car } \ln(0,93) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 95,1\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 96 \text{ (car } n \text{ est un entier)}.
\end{aligned}$$

Le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$ est 96.

EXERCICE 3

Partie A

1) La limite d'une fraction rationnelle en $+\infty$ est égale à la limite du quotient de ses monômes de plus haut degré. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$. Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \lim\limits_{X\to 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

2) La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1,+\infty[$. De plus, pour tout réel x de $[1,+\infty[$, $\dfrac{x}{x+1} > 0$. On sait alors que la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ est dérivable sur $[1,+\infty[$. D'autre part, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1,+\infty[$. Finalement, la fonction f est dérivable sur $[1,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $[1,+\infty[$. De plus, pour tout réel x de $[1,+\infty[$,

1er calcul :

$$f'(x) = -\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} + \frac{\left(\dfrac{x}{x+1}\right)'}{\dfrac{x}{x+1}} = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x} \times \frac{1\times(x+1) - x\times 1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x+(x+1)}{x(x+1)^2}$$
$$= \frac{1}{x(x+1)^2}.$$

2ème calcul :

$$f'(x) = -\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} + (\ln(x))' - (\ln(x+1))' = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x+(x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2}$$
$$= \frac{-x+x^2+2x+1-x-x^2}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}.$$

3) Pour tout réel x de $[1,+\infty[$, $f'(x) > 0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Mais alors, pour tout x de $[1,+\infty[$, on a $f(x) < \lim\limits_{+\infty} f$ ou encore $f(x) < 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement négative sur } [1,+\infty[.}$$

Partie B

1)
- Initialisation : $u = 0$.
- Etape 1 : $i = 1$ puis $u = 0 + \dfrac{1}{1} = 1$.
- Etape 2 : $i = 2$ puis $u = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.
- Etape 3 : $i = 3$ puis $u = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$.

Si $n = 3$, la valeur exacte affichée par l'algorithme est $\dfrac{13}{6}$.

2)

Variables :	i et n sont des entiers naturels.
	u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur le valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n.
	Affecter à u la valeur $u + \dfrac{1}{i}$.
Sortie :	Afficher $u - \ln(n)$

3) Il semble que la suite (u_n) soit décroissante, convergente de limite approximativement égale à $0,57$.

Partie C

1) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1}-u_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\ln(n+1)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\ln(n)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\ln(n)-\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}$$

D'après la question 3) de la partie A, le fonction f est strictement négative sur $[1,+\infty[$. En particulier, pour tout entier $n\geqslant 1$, $f(n)<0$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_{n+1}-u_n<0$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

2) a) Soit k un entier strictement positif. La fonction $x\mapsto\frac{1}{k}-\frac{1}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et en particulier sur $[k,k+1]$. Donc l'intégrale $\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)dx$ existe.

Pour tout réel x de l'intervalle $[k,k+1]$, on a $x\geqslant k>0$ puis $\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{k}$ (par décroissance de la fonction $t\mapsto\frac{1}{t}$ sur $]0,+\infty[$) et donc $\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\geqslant 0$.

Ainsi, pour tout réel x de $[k,k+1]$, on a $\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)dx\geqslant 0$.

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)dx=\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,dx-\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{k}\times(k+1-k)-\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{k}-\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx.$$

Par suite, $\frac{1}{k}-\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx\geqslant 0$ ou encore $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx\leqslant\frac{1}{k}$.

Enfin, $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx=[\ln(x)]_k^{k+1}=\ln(k+1)-\ln k$ et on a donc montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier } k \text{ strictement positif, } \ln(k+1)-\ln k\leqslant\frac{1}{k}\quad(1).}$$

b) Soit n un entier strictement positif. D'après la question précédente,

$$\begin{array}{lcl}
\ln(2)-\ln(1) & \leqslant & 1\\
\ln(3)-\ln(2) & \leqslant & \frac{1}{2}\\
\ln(4)-\ln(3) & \leqslant & \frac{1}{3}\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
\ln(n-1)-\ln(n-2) & \leqslant & \frac{1}{n-2}\\
\ln(n)-\ln(n-1) & \leqslant & \frac{1}{n-1}\\
\ln(n+1)-\ln(n) & \leqslant & \frac{1}{n}
\end{array}$$

On additionne membre à membre ces n inégalités. Dans le premier membre, les nombres $\ln(2)$, $\ln(3)$, ..., $\ln(n-1)$ et $\ln(n)$ se simplifient et il reste $-\ln(1)+\ln(n+1)\leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ ou encore $\ln(n+1)\leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$.

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On retranche $\ln(n)$ à chacun des deux membres de l'inégalité précédente et on obtient $\ln(n+1)-\ln(n)\leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n)$ ou encore

$$u_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(n).$$

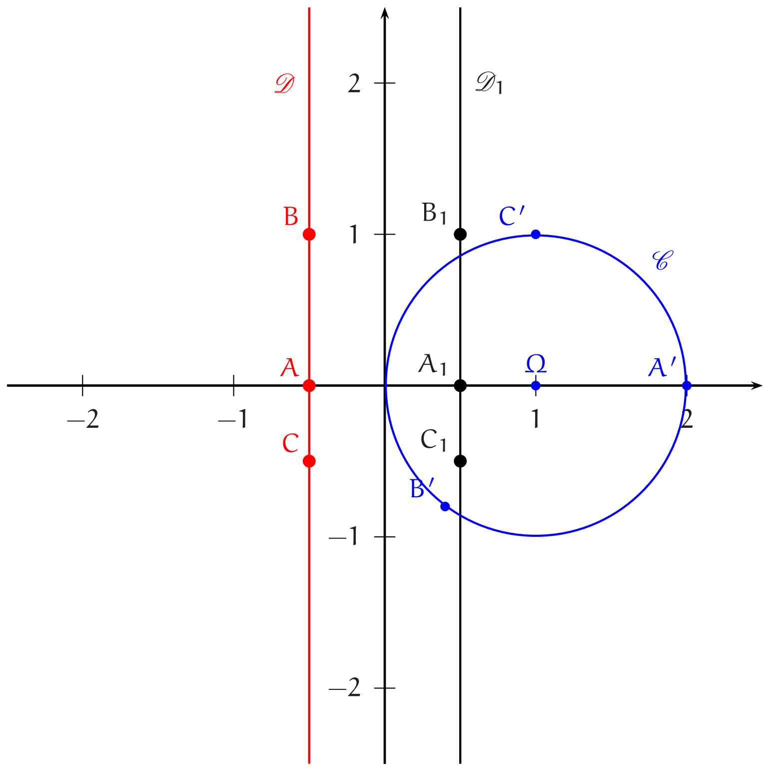
Par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$, on a $\ln(n+1) \geqslant \ln(n)$ puis $\ln(n+1) - \ln(n) \geqslant 0$. Par suite, $u_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(n) \geqslant 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier strictement positif } n,\ u_n \geqslant 0.}$$

3) La suite (u_n) est décroissante d'après la question 1) et minorée par 0 d'après la question 2). On en déduit que la suite (u_n) converge.

EXERCICE 4

1) a) Graphique.



b) • $z_{A'} = \dfrac{1}{z_A+1} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}+1} = \dfrac{1}{1/2} = 2.$

• $z_{B'} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}+i+1} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+i} = \dfrac{2}{1+2i} = \dfrac{2(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{2-4i}{1^2+2^2} = \dfrac{2}{5}-\dfrac{4}{5}i.$

• $z_{C'} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i+1} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i} = \dfrac{2}{1-i} = \dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2(1+i)}{1^2+1^2} = 1+i.$

c) Les points A', B' et C' ont pour coordonnées respectives $(2,0)$, $\left(\dfrac{2}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$ et $(1,1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{8}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{A'C'}$ a pour coordonnées $(-1,1)$.

S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$, alors $-k = -\dfrac{8}{5}$ et aussi $k = -\dfrac{4}{5}$ ce qui est impossible. Donc les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ ne sont pas colinéaires ou encore

$$\boxed{\text{les points } A',\ B' \text{ et } C' \text{ ne sont pas alignés.}}$$

2) a) On sait que g est la translation de vecteur $\overrightarrow{w}(1,0)$.

b) Les points A, B et C sont trois points deux à deux distincts de la droite $\mathscr{D}$ et donc $\mathscr{D} = (AB)$ par exemple. On sait que l'image d'une droite par une translation est une droite. Par suite, $\mathscr{D}_1$ est la droite passant par $A_1 = g(A)$ et $B_1 = g(B)$ ou encore $\mathscr{D}_1 = (A_1B_1)$. Voir graphique.

c) $\mathscr{D}_1$ est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$. D'autre part, l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-1| = |z|$ est l'ensemble des points M à égale distance des points $O(0,0)$ et $\Omega(1,0)$. Cet ensemble est la médiatrice du segment $[O,\Omega]$ ou encore la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ ou enfin la droite $\mathscr{D}_1$.

3) a) A_1, B_1 et C_1 sont distincts de O. Donc $h(A_1)$, $h(B_1)$ et $h(C_1)$ existent.

$z_{h(A_1)} = \dfrac{1}{z_{A_1}} = \dfrac{1}{z_A+1} = z'_A$ et donc $h(A_1) = A'$. De même, $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.

b) Soit z un nombre complexe non nul.

$$\left|\frac{1}{z}-1\right|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{1-z}{z}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{|1-z|}{|z|}=1 \Leftrightarrow |1-z|=|z| \Leftrightarrow |-(z-1)|=|z| \Leftrightarrow |z-1|=|z|.$$

c) Soit M_1 un point de $\mathscr{D}_1$ dont l'affixe est notée z_1. M_1 est distinct de O et donc $h(M_1)$ existe. De plus, $|z_1-1|=|z_1|$ d'après la question 2)c) et donc $\left|\frac{1}{z_1}-1\right|=1$ d'après la question 3)b). $\frac{1}{z_1}$ est l'affixe de $h(M_1)$ et donc $\Omega h(M_1)=1$ (où $\Omega(1,0)$). Ainsi, le point $h(M_1)$ est appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(1,0)$ et de rayon 1.

4) $f(\mathscr{D})=h\left(g\left(\mathscr{D}\right)\right)=h\left(\mathscr{D}_1\right)=\mathscr{C}\setminus\{O\}$.

$$\boxed{f(\mathscr{D})=\mathscr{C}\setminus\{O\}.}$$

