BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2012

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Asie

EXERCICE 1

1) VRAI

2) FAUX

3) VRAI

4) FAUX

5) VRAI

1) Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(-2, 1, -4)$ et un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$n est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(3, 2, -1)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = (-2) \times 3 + 1 \times 2 + (-4) \times (-1) = -6 + 2 + 4 = 0.$$

On en déduit que la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ c'est-à-dire soit incluse dans le plan $\mathscr{P}$ soit strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$ et dans ce cas sans point commun avec le plan $\mathscr{P}$.

Un point de la droite $\mathscr{D}$ est le point A de coordonnées $(1, 0, -5)$.

$$3x_A + 2y_A - z_A - 5 = 3 + 0 + 5 - 5 = 3 \neq 0.$$

Par suite, le point A n'appartient à $\mathscr{P}$ et donc la droite $\mathscr{D}$ n'est pas incluse dans le plan $\mathscr{P}$. Finalement la droite $\mathscr{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$ et l'affirmation 1 est vraie.

2) La distance d du point A au plan $\mathscr{P}$ est

$$d = \frac{|4x_A - y_A - z_A + 3|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 - 9 + 0 + 3|}{\sqrt{18}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

L'affirmation 2 est fausse.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^{-2x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3}{1+0} = 3$. On en déduit que la droite d'équation $y = 3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$. L'affirmation 3 est vraie.

4) Pour tout réel $t \in [1; 1,5]$, $(2-t)e^{-t} \geqslant (2-1,5)e^{-1,5} = 0,5e^{-1,5}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$F(1,5) = \int_1^{1,5} (2-t)e^{-t}\ dt \geqslant \int_1^{1,5} 0,5e^{-1,5}\ dt = (1,5-1) \times 0,5e^{-1,5} = 0,25e^{-1,5} > 0.$$

Ainsi, il existe un réel $x_0 \geqslant 1$ à savoir $x_0 = 1,5$ tel que $F(x) > 0$ et donc l'affirmation 4 est fausse.

5) Pour t dans $[1, e]$, posons $u(t) = \ln t$ et $v(t) = \dfrac{t^3}{3}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1, e]$ et pour t dans $[1, e]$, on a

$$\begin{array}{ll} u(t) = \ln t & v(t) = \dfrac{t^3}{3} \\ u'(t) = \dfrac{1}{t} & v'(t) = t^2 \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[1, e]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \ln t \times t^2 \, dt = \left[\ln t \times \frac{t^3}{3}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t} \times \frac{t^3}{3} \, dt = \ln e \times \frac{e^3}{3} - 0 - \frac{1}{3}\int_1^e t^2 \, dt \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{2e^3+1}{9}. \end{aligned}$$

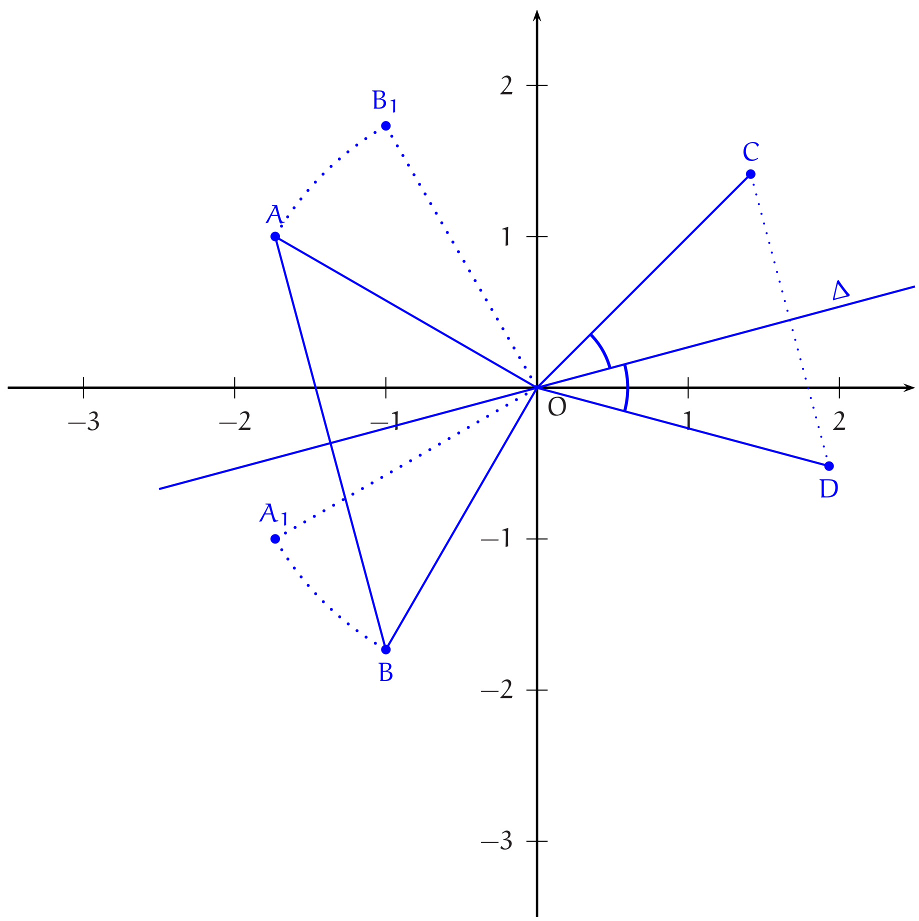
L'affirmation 5 est vraie.

EXERCICE 2

1) a) $|z_A| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$ puis

$$z_A = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}.$$

Graphique



b) $z_{A_1} = \overline{\left(2e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)} = 2\overline{\left(e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)} = 2e^{-\frac{5i\pi}{6}}$ puis

$$z_B = z_O + e^{\frac{i\pi}{6}}\left(z_{A_1} - z_O\right) = e^{\frac{i\pi}{6}} \times 2e^{-\frac{5i\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right)} = 2e^{-\frac{4i\pi}{6}} = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}.$$

Ensuite,

$$z_B = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

$$\boxed{z_B = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3}.}$$

2) a) $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{2e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{2e^{\frac{5i\pi}{6}}} = e^{i\left(-\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right)} = e^{-\frac{9i\pi}{6}} = e^{-\frac{3i\pi}{2}}e^{i\left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi\right)} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$. On en déduit que

- $\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{|z_B|}{|z_A|} = \left|\dfrac{z_B}{z_A}\right| = |i| = 1$ et donc $OA = OB$.
- $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Finalement, le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

b) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{w}$ est $e^{\frac{i\pi}{12}}$ puis

- $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{w}\right) = \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_A}\right) = \arg\left(\dfrac{e^{\frac{i\pi}{12}}}{2e^{\frac{5i\pi}{6}}}\right) = \arg\left(e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{6}\right)}\right) = \arg\left(e^{-\frac{9i\pi}{12}}\right) = \arg\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) = -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.
- $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B}{z_{\overrightarrow{w}}}\right) = \arg\left(\dfrac{2e^{\frac{-2i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{12}}}\right) = \arg\left(e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)}\right) = \arg\left(e^{-\frac{9i\pi}{12}}\right) = \arg\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) = -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

Donc, $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OB}\right)$. Ceci montre que la droite Δ est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

3) $z_{B_1} = \overline{\left(2e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)} = 2\overline{\left(e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$ puis

$$z_{B'} = z_O + e^{\frac{i\pi}{6}}\left(z_{B_1} - z_O\right) = e^{\frac{i\pi}{6}} \times 2e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{\frac{5i\pi}{6}} = z_A,$$

et donc $B' = A$.

4) $|z_C| = \sqrt{2} \times \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ puis

$$z_C = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Notons s la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ. Le point O appartient à la droite Δ. Donc

$$OD = s(O)s(C) = OC = |z_C| = 2.$$

Posons alors $z_D = 2e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OD}\right) = \theta\ [2\pi]$. Puisque D est le symétrique de C par rapport à la droite Δ, la droite Δ est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right)$. Mais alors $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OD}\right)$. Or,

- $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$,
- $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OD}\right) = \left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OD}\right) = -\dfrac{\pi}{12} + \theta\ [2\pi]$.

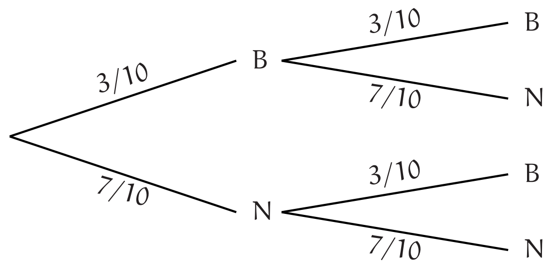
Par suite, $-\dfrac{\pi}{12} + \theta = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$ ou encore $\theta = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$ ou enfin $\theta = -\dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$. Finalement,

$$\boxed{z_D = 2e^{-\frac{i\pi}{12}}.}$$

EXERCICE 3

Partie A

1) On note N l'événement « la boule obtenue au cours d'un tirage est noire » et B l'événement « la boule obtenue au cours d'un tirage est blanche ». Représentons la situation par un arbre :



La probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est

$$p = \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{42}{100} = 0,42.$$

2) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le candida t gagne la partie » avec une probabilité $p = 0,42$ (d'après la question précédente) ou « le candidat perd la partie » avec une probabilité $1 - p = 0,58$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,42$.

b) $p_n = p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}(0,42)^0(0,58)^n = 1 - (0,58)^n$.

En particulier, $p_{10} = 1 - (0,58)^{10} = 0,996$ arrondie au millième.

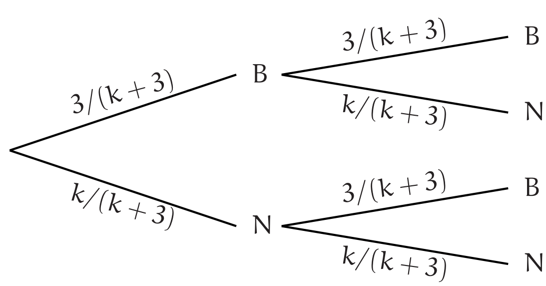
c)

$$\begin{aligned} p_n \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1 - (0,58)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow (0,58)^n \leqslant 0,01 \\ &\Leftrightarrow \ln\left((0,58)^n\right) \leqslant \ln(0,01) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow n\ln(0,58) \leqslant \ln(0,01) \\ &\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,58)} \Leftrightarrow n \geqslant 8,4\ldots \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 9 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

Le joueur doit jouer un nombre minimal de 9 parties pour que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99%.

Partie B

1) a) L'événement $Y_k = 5$ est l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes. Représentons la situation par un arbre :



$p(Y_k = 5)$ qui est encore la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est

$$p(Y_k = 5) = \frac{k}{(k+3)} \times \frac{3}{k+3} + \frac{3}{k+3} \times \frac{k}{k+3} = \frac{6k}{(k+3)^2}.$$

b) De même, $p\left(Y_k = -9\right) = \frac{3}{k+3} \times \frac{3}{k+3} = \frac{9}{(k+3)^2}$ et $p\left(Y_k = -1\right) = \frac{k}{k+3} \times \frac{k}{k+3} = \frac{k^2}{(k+3)^2}$. Donnons alors la loi de probabilité de Y_k dans un tableau :

y_i	-9	-1	5
$p(Y_k = y_i)$	$9/(k+3)^2$	$k^2/(k+3)^2$	$6k/(k+3)^2$

2) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$E\left(Y_k\right) = -9 \times \frac{9}{(k+3)^2} - 1 \times \frac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \frac{6k}{(k+3)^2} = \frac{-k^2 + 30k - 81}{(k+3)^2},$$

puis

$$\begin{aligned}
E\left(Y_k\right) > 0 &\Leftrightarrow \frac{-k^2 + 30k - 81}{(k+3)^2} > 0 \Leftrightarrow -k^2 + 30k - 81 > 0 \text{ (car } (k+3)^2 > 0) \\
&\Leftrightarrow k^2 - 30k + 81 < 0 \Leftrightarrow (k-15)^2 - 15^2 + 81 < 0 \Leftrightarrow (k-15)^2 < 144 \\
&\Leftrightarrow -12 < k - 15 < 12 \Leftrightarrow 3 < k < 27 \Leftrightarrow 4 \leqslant k \leqslant 26.
\end{aligned}$$

Les valeurs de k pour lesquelles le jeu est favorable au joueur sont 4, 5, 6, ..., 24, 25 et 26.

EXERCICE 4

1)

n	a	b	u	v
0	4	9	4	9
1	6,5	6,964	6,5	6,964
2	6,732	6,736	6,732	6,736

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

• Pour $n = 0$, on a $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$. La proposition est donc vraie pour $n = 0$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} > 0$ et $v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2}} > 0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \frac{u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2}{4} = \frac{u_n^2 - 2u_nv_n + v_n^2}{4}$$
$$= \frac{(u_n - v_n)^2}{4} = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, $v_n^2 - u_n^2 = \left(\dfrac{u_{n-1} - v_{n-1}}{2}\right)^2 \geqslant 0$ puis $v_n^2 \geqslant u_n^2$ et donc $u_n \leqslant v_n$ car u_n et v_n sont des nombres positifs.

D'autre part, l'inégalité $a \leqslant b$ s'écrit encore $u_0 \leqslant v_0$. Finalement, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{-u_n + v_n}{2}.$$

La question précédente permet alors d'affirmer que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ puis que $u_{n+1} \geqslant u_n$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$ et donc la suite (u_n) est croissante.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1}^2 - v_n^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - v_n^2 = \frac{u_n^2 - v_n^2}{2} = \frac{(u_n - v_n)(u_n + v_n)}{2} \leqslant 0.$$

Ainsi, $v_{n+1}^2 \leqslant v_n^2$ puis $v_{n+1} \leqslant v_n$ car v_n et v_{n+1} sont des réels positifs.

Puisque pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$, la suite (v_n) est décroissante.

4) Pour tout entier naturel n, on a $u_0 \leqslant u_n$ car la suite (u_n) est croissante. De même, pour tout entier naturel n, on a $v_0 \geqslant v_n$. Mais alors, d'après la question 2)b),

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0.$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0. On en déduit que la suite (u_n) converge. De même, la suite (v_n) est décroissante et minorée par v_0 et on en déduit que la suite (v_n) converge.

$$\boxed{\text{Les deux suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont convergentes.}}$$

