BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement de Spécialité
Rochambeau

EXERCICE 1

Partie A

1) L'expression complexe de r_A est $z' = a + e^{i\pi/2}(z - a) = i + i(z - i) = iz + 1 + i$. Donc

$$d = ic + 1 + i = i(3i) + 1 + i = -3 + 1 + i = -2 + i.$$

$$\boxed{d = -2 + i.}$$

2) De même, l'expression complexe de r_B est $z' = b + e^{i\pi/2}(z - b) = 1 + i + i(z - 1 - i) = iz + 1 + i - i + 1 = iz + 2$ et l'expression complexe de r_O est $z' = e^{-i\pi/2}z = -iz$. Donc

$$g = id + 2 = i(-2 + i) + 2 = -2i - 1 + 2 = 1 - 2i \text{ et } h = -ic = -i(3i) = 3.$$

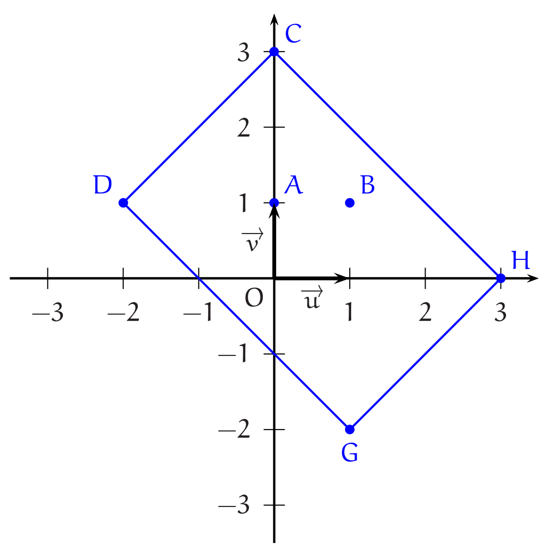
$$\boxed{g = 1 - 2i \text{ et } h = 3.}$$

3) Les coordonnées des points C, D, G et H sont : $C(0, 3)$, $D(-2, 1)$, $G(1, -2)$ et $H(3, 0)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DC}$ sont $(2, 2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GH}$ sont $(2, 2)$. Donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{GH}$ et par suite le quadrilatère $CDGH$ est un parallélogramme. De plus, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DG}$ sont $(3, -3)$ et donc

$$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG} = 2 \times 3 + 2 \times (-3) = 0.$$

On en déduit que $(DC) \perp (DG)$. Ainsi, le parallélogramme $CDGH$ possède un angle droit et on a montré que

$$\boxed{\text{le quadrilatère } CDGH \text{ est un rectangle.}}$$



Partie B

1) D'après la question 1 de la partie A, l'écriture complexe de la rotation r_A est $z' = iz + 1 + i$ et donc $n = im + 1 + i$.

2) $n-m = im+1+i-m = (-1+i)m+1+i$ et $p-q = -m+1+i+im = (-1+i)m+1+i$. Donc $n-m = p-q$ ou encore $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. Par suite,

$$\boxed{\text{le quadrilatère } MNPQ \text{ est un parallélogramme.}}$$

3) a) $p-n = -m+1+i-im-1-i = -(1+i)m \neq 0$ (car $M \neq O$ et donc $m \neq 0$) puis $m-n = m-im-1-i = (1-i)m-(1+i)$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{m-n}{p-n} &= \frac{(1-i)m-(1+i)}{-(1+i)m} = \frac{(1-i)m}{-(1+i)m} + \frac{-(1+i)}{-(1+i)m} = -\frac{1-i}{1+i} + \frac{1}{m} \\ &= -\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} + \frac{1}{m} = -\frac{1-2i-1}{1^2+1^2} + \frac{1}{m} = -\frac{-2i}{2} + \frac{1}{m} = i + \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

b) On note tout d'abord que $m-n = 0 \Leftrightarrow i + \dfrac{1}{m} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{m} = -i \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{i} \Leftrightarrow m = i \Leftrightarrow M = A$. Comme $M \neq A$, on a donc $m-n \neq 0$ ou encore $M \neq N$. Ensuite,

$$\left(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}\right) = \arg\left(\frac{m-n}{p-n}\right) = \arg\left(i + \frac{1}{m}\right) \ [2\pi].$$

Soit m un nombre complexe tel que $m \neq 0$ et $m \neq a$,

$$\begin{aligned}MNPQ \text{ est un rectangle} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(i + \frac{1}{m}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow i + \frac{1}{m} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \frac{1}{m} \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{m}}{|m|^2} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \overline{m} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow m \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow M \in (Oy).\end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des points M distincts de O et A tels que le quadrilatère $MNPQ$ soit un rectangle est l'axe (Oy) privé des points O et A.

EXERCICE 2

Partie A

Il y a $\binom{25}{2}$ choix de deux ordinateurs parmi 25 et $\binom{3}{2}$ choix de deux ordinateurs parmi les trois défectueux. La probabilité demandée est donc

$$p = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{\frac{3\times 2}{2}}{\frac{25\times 24}{2}} = \frac{3\times 2}{25\times 24} = \frac{1}{25\times 4} = \frac{1}{100}.$$

Partie B

1) Soit t un réel positif.
$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$ puis $p(X > t) = 1 - p(X \leqslant t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$. Par suite

$$p(X > 5) = 0,4 \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = 0,4 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \Leftrightarrow 5\lambda = \ln\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{5}{2}\right).$$

avec $\frac{1}{5}\ln\left(\frac{5}{2}\right) = 0,18$ à 10^{-2} près.

2) $p_{X>3}(X > 5) = \frac{p((X > 5)\cap(X > 3))}{p(X > 3)} = \frac{p(X > 5)}{p(X > 3)} = \frac{e^{-5\times 0,18}}{e^{-3\times 0,18}} = \frac{e^{-0,9}}{e^{-0,54}} = e^{-0,36} = 0,698$ à 10^{-3} près.

3) a) Notons X le nombre d'ordinateurs dont la durée de vie est supérieure à 5 ans. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'ordinateur a une durée de vie supérieure à 5 ans » avec une probabilité $p = 0,4$ ou « l'ordinateur a une durée de vie inférieure à 5 ans » avec une probabilité $1 - p = 0,6$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,4$.

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$. Or

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}(0,4)^0(0,6)^{10} = 1 - 0,6^{10} = 0,994 \text{ arrondi au millième.}$$

b) Dans cette question n est un entier naturel non nul quelconque et $p(X \geqslant 1) = 1 - 0,6^n$. Puis

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 1) \geqslant 0,999 &\Leftrightarrow 1 - 0,6^n \geqslant 0,999 \Leftrightarrow 0,001 \geqslant 0,6^n \\ &\Leftrightarrow \ln(0,001) \geqslant \ln(0,6^n) \text{ (par croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow n\ln(0,6) \leqslant \ln(0,001) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)} \text{ (car } \ln(0,6) < 0) \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 13,5\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 14 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

Le nombre minimal d'ordinateurs que l'on doit choisir pour que la probabilité que l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans soit supérieure à 0,999 est 14.

EXERCICE 3

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Soient a, b et c trois entiers relatifs tels que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et a et b premiers entre eux. On suppose que a divise $b \times c$. Il existe donc un entier relatif k tel que $bc = ka$. Puisque a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$. On multiplie les deux membres de cette égalité par c et on obtient

$$c = acu + bcv = acu + kav = a(cu + kv).$$

Puisque $cu + kv$ est un entier relatif, l'égalité précédente montre que a divise c.

On a montré le théorème de Gauss : « si a, b et c sont trois entiers relatifs tels que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et a et b premiers entre eux et si a divise bc, alors a divise c ».

Partie B

1) • $u_1 = 2 + 3 + 6 - 1 = 10$.
• $u_2 = 4 + 9 + 36 - 1 = 48$.
• $u_3 = 8 + 27 + 216 - 1 = 250$.
• $u_4 = 16 + 81 + 1296 - 1 = 1392$.
• $u_5 = 32 + 243 + 7776 - 1 = 8050$.
• $u_6 = 64 + 729 + 46656 - 1 = 47448$.

2) Soit n un entier naturel non nul. $2^n+3^n+6^n-1 \equiv 0^n+1^n+0^n-1$ (modulo 2) ou encore $2^n+3^n+6^n-1 \equiv 0$ (modulo 2). Donc u_n est un multiple de 2 ou encore u_n est pair.

3) Soit n un entier naturel pair non nul. Il existe un entier naturel k non nul tel que $n = 2k$ et donc

$$u_n = 2^{2k} + 3^{2k} + 6^{2k} - 1 = 4^k + 9^k + 36^k - 1.$$

Or $4^k + 9^k + 36^k - 1 \equiv 0^k + 1^k + 0^k - 1$ (modulo 4) ou encore $4^k + 9^k + 36^k - 1 \equiv 0$ (modulo 4).
Donc, si n est un entier naturel pair non nul, u_n est un multiple de 4 ou encore u_n est divisible par 4.

4) 2, 3, 5 et 7 sont des nombres premiers. D'après la question 2, l'entier 2 appartient à (E).
Puisque $u_2 = 3 \times 16$, 3 divise u_2 et donc l'entier 3 appartient à (E).
Puisque $u_1 = 5 \times 2$, 5 divise u_1 et donc l'entier 5 appartient à (E).
Puisque $u_5 = 7 \times 1150$, 7 divise u_5 et donc l'entier 7 appartient à (E).

5) Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.

a) Les entiers 2 et 3 sont premiers à p. D'autre part, $p \geqslant 5$ et donc $p - 2 \geqslant 3$.

$6 \times 2^{p-2} = 3 \times 2 \times 2^{p-2} = 3 \times 2^{p-1}$. Comme 2 est premier au nombre premier p, le petit théorème de Fermat permet d'affirmer que $2^{p-1} \equiv 1$ (modulo p). On en déduit que $3 \times 2^{p-1} \equiv 3 \times 1$ (modulo p) ou encore que $6 \times 2^{p-2} \equiv 3$ (modulo p).
De même, $6 \times 3^{p-2} = 2 \times 3^{p-1} \equiv 2 \times 1$ (modulo p) ou encore $6 \times 3^{p-2} \equiv 2$ (modulo p).

b) $6u_{p-2} = 6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{p-2} + 6^{p-1} - 6$. Puisque p est premier à 2 et à 3 et puisque $6 = 2 \times 3$, 6 est premier à p. Donc $6^{p-1} \equiv 1$ (modulo p). D'après la question a), on en déduit que

$$6u_{p-2} \equiv 3 + 2 + 1 - 6 \text{ (modulo } p\text{) ou encore } 6u_{p-2} \equiv 0 \text{ (modulo } p\text{)}.$$

c) Ainsi, puisque p divise $6u_{p-2}$ et que p est premier à 6, le théorème de Gauss permet d'affirmer que p divise u_{p-2}. Puisque $p - 2$ est un entier naturel non nul, p appartient à l'ensemble (E). Finalement, tout nombre premier divise l'un des nombres u_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 4

Partie A

1) La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel x de $[0,+\infty[$

$$g'(x) = e^x - 1.$$

Par suite, $g'(0) = e^0 - 1 = 0$ et si $x > 0$, $g'(x) > 0$ car $e^x > 1$. En résumé, la fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et sa dérivée est strictement positive sur $]0,+\infty[$. On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

2) Puisque $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$ et puisque la fonction g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, pour tout $x > 0$, $g(x) > g(0) = 0$. Donc la fonction g s'annule en 0 et est strictement positive sur $]0,+\infty[$.

3) Pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ ou encore $e^x - x - 1 \geqslant 0$. Mais alors, pour tout $x \geqslant 0$, $e^x - x \geqslant 1$ et en particulier,

$$\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 0,\ e^x - x > 0.}$$

Partie B

1) Soit $x \in [0,1]$. Puisque la fonction f est croissante sur $[0,1]$, (résultat admis par l'énoncé), on a $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$ ou encore $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ de } [0,1],\ f(x) \in [0,1].}$$

2) a) Soit $x \in [0,1]$.

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x = \frac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x} = \frac{e^x(1-x) - (1-x^2)}{e^x - x} = \frac{(1-x)(e^x - (1+x))}{e^x - x} = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}.$$

b) Pour tout $x \in]0,1[$, $g(x) > 0$ (d'après la partie A), $1 - x > 0$ et $e^x - x > 0$ (d'après la partie A). Donc, pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) - x > 0$. D'autre part $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Donc la droite (D) est strictement au-dessous de la courbe (C) sur $]0,1[$ et la droite (D) et la courbe (C) se coupent aux points de coordonnées $(0,0)$ et $(1,1)$.

3) a) La fonction f est continue sur $[0,1]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[0,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$. Donc la fonction f admet des primitives sur $[0,1]$.
On remarque que $(e^x - x)' = e^x - 1$ et puisque pour tout $x \in [0,1]$, $e^x - x > 0$,

$$\boxed{\text{une primitive de } f \text{ sur } [0,1] \text{ est la fonction } F\ :\ x \mapsto \ln(e^x - x).}$$

b) On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine considéré par l'énoncé. Puisque la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur $[0,1]$,

$$\mathscr{A} = \int_0^1 (f(x) - x)\,dx = \left[F(x) - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\ln(e^1 - 1) - \frac{1}{2}\right) - \left(\ln(e^0 - 0) - 0\right) = \ln(e-1) - \frac{1}{2}.$$

Partie C

1) Voir graphique page suivante.

2) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

• $u_0 = \frac{1}{2}$ et donc $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant 1$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

Puisque la fonction f est croissante sur $[0,1]$ (résultat admis par l'énoncé), on en déduit que $f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$ ou encore que $f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Maintenant, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{0,5} - 1}{e^{0,5} - 0,5} = 0,56\ldots \geqslant 0,5$ et finalement $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La question 2.b) de la partie B permet d'affirmer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) \geqslant x$. Puisque $u_n \in [0, 1]$, on a donc $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$. Finalement,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.}$$

3) Ainsi, la suite (u_n) est une suite croissante et majorée par 1. On en déduit que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$). Puisque l'application f est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et donc en ℓ, on a

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(\ell).$$

D'après la question 2.b) de la partie B, il existe un et un seul réel $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tel que $f(x) = x$ à savoir $x = 1$ et donc $\ell = 1$.

On a montré que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.}$$