BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement de Spécialité
Réunion

EXERCICE 1

1. Réponse 2

2. Réponse 4

3. Réponse 3

4. Réponse 1

Explication 1. Soit $M(-8+2t, 7-t, 6+t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$2x_M + 3y_M - z_M + 4 = 2(-8+2t) + 3(7-t) - (6+t) + 4 = 3.$$

Donc, pour tout point M de $\mathscr{D}$, $2x_M + 3y_M - z_M + 4 \neq 0$ et le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont aucun point commun. La bonne réponse est la réponse 2.

Explication 2. Le plan $\mathscr{P}$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2,3,-1)$ et le plan $\mathscr{P}'$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}'(1,4,-3)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants en une droite $\mathscr{D}$. Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ doit être orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$.

$$(-1)\times 2 + 1\times 3 + 2\times(-1) = -2+3-2 = -1 \neq 0.$$

Donc le vecteur de coordonnées $(-1,1,2)$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et par suite n'est pas un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. La bonne réponse est donc nécessairement la dernière. Vérifions le.

$$(-1)\times 2 + 1\times 3 + 1\times(-1) = -2+3-1 = 0 \text{ et } (-1)\times 1 + 1\times 4 + 1\times(-3) = -1+4-3 = 0.$$

Le vecteur de coordonnées $(-1,1,1)$ est effectivement orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ et donc est effectivement un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. La bonne réponse est la réponse 4.

Explication 3. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned}
MA = MB &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = (x+3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4y+8z+1+4+16 = x^2+y^2+z^2+6x-8y-2z+9+16+1 \\
&\Leftrightarrow -8x+4y+10z-5 = 0 \Leftrightarrow -4x+2y+5z-\frac{5}{2} = 0.
\end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse 3.

Explication 4. Soit $G = \mathrm{bar}\{A(1), B(-3)\}$. Soit M un point de l'espace.

$$\left\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right\| = 5 \Leftrightarrow \left\|(1-3)\overrightarrow{MG}\right\| = 5 \Leftrightarrow 2MG = 5 \Leftrightarrow MG = \frac{5}{2}.$$

L'ensemble considéré est donc la sphère de centre G et de rayon $\frac{5}{2}$. De plus,

- $x_G = \dfrac{x_A - 3x_B}{1-3} = \dfrac{1-3\times(-3)}{-2} = -5$,
- $y_G = \dfrac{y_A - 3y_B}{1-3} = \dfrac{2-3\times(4)}{-2} = 5$,
- $z_G = \dfrac{x_A - 3x_B}{1-3} = \dfrac{-4-3\times 1}{-2} = \dfrac{7}{2}$.

Donc les coordonnées du point G sont $\left(-5, 5, \frac{7}{2}\right)$. La bonne réponse est la réponse 1.

EXERCICE 2

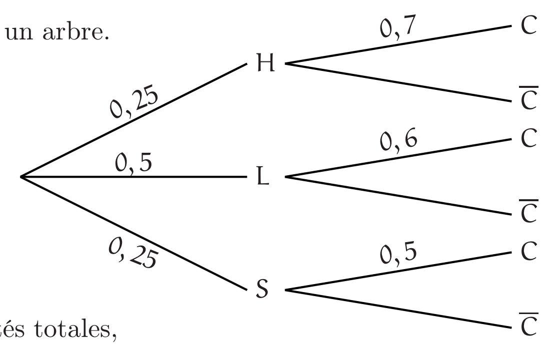
1) Le nombre de tirages simultanés de 4 bulletins parmi 10 est
$$\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 10 \times 3 \times 7 = 210.$$

Il y a $\binom{4}{4} = 1$ tirage simultané de 4 bulletins parmi les 4 bulletins comportant une question d'histoire. Donc $p(A) = \frac{1}{210}$.
D'autre part, l'événement B est l'événement contraire de l'événement « aucun bulletin ne comporte une question de sport ».
Il y a 8 bulletins ne comportant pas une question de sport puis
$$\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} = 7 \times 2 \times 5 = 70$$
tirages simultanés de 4 bulletins parmi les 8 ne comportant pas une question de sport.

Donc $p(B) = 1 - \dfrac{\binom{8}{4}}{\binom{10}{4}} = 1 - \dfrac{70}{210} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{p(A) = \frac{1}{210} \text{ et } p(B) = \frac{2}{3}.}$$

2) a) Représentons la situation par un arbre.



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(C) &= p(H \cap C) + p(L \cap C) + p(S \cap C) = p(H) \times p_H(C) + p(L) \times p_L(C) + p(S) \times p_S(C) \\ &= 0,25 \times 0,7 + 0,5 \times 0,6 + 0,25 \times 0,5 = 0,175 + 0,3 + 0,125 = 0,6. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(C) = 0,6.}$$

c) La probabilité demandée est $p_C(S)$. Or
$$P_C(S) = \frac{p(C \cap S)}{p(C)} = \frac{p(S) \times p_S(C)}{p(C)} = \frac{0,25 \times 0,5}{0,6} = \frac{0,125}{0,6} = \frac{125}{600} = \frac{5}{24}.$$

$$\boxed{p_C(S) = \frac{5}{24}.}$$

3) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,
- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la réponse donnée à une question est correcte » avec une probabilité $p = 0,7$ ou « la réponse donnée à une question n'est pas correctes » avec une probabilité $1 - p = 0,3$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,7$.

On sait alors que

$$\boxed{\text{pour tout entier } k \text{ compris entre 0 et 10, } p(X = k) = \binom{10}{k} \times 0,7^k \times 0,3^{10-k}.}$$

b) $p(X \geqslant 9) = p(X = 9) + p(X = 10) = 10 \times 0,7^9 \times 0,3^1 + 0,7^{10} = 0,15$ arrondi à 10^{-2}.

$$\boxed{p(X \geqslant 9) = 0,15 \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

EXERCICE 3

Partie A

1) a) Pour tout réel x, $e^{2x}+1>1$ et en particulier, pour tout réel x, $e^{2x}+1\neq 0$. Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f'(x)=0-4\frac{e^x(e^{2x}+1)-e^x(2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}=-4\frac{e^x(e^{2x}+1-2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}=-4\frac{e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}=4\frac{e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f'(x)=4\frac{e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}.}$$

b) Pour tout réel $x>0$, $2x>0$ et donc $e^{2x}>1$ puis $e^{2x}-1>0$. D'autre part, pour tout réel $x>0$, $4e^x>0$ et $(e^{2x}+1)^2>0$. On en déduit que pour tout réel $x>0$, $f'(x)>0$.

Ainsi, la fonction f' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et puisque f est dérivable sur $[0,+\infty[$, la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[.}$$

2) Soit x un réel.

$$f(-x)=1-\frac{4e^{-x}}{e^{-2x}+1}=1-\frac{\dfrac{4}{e^x}}{\dfrac{1}{e^{2x}}+1}=1-\frac{\dfrac{4}{e^x}}{\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}=1-4\frac{\dfrac{e^{2x}}{e^x}}{e^{2x}+1}=1-\frac{4e^x}{e^{2x}+1}=f(x).$$

En résumé, pour tout réel x, $f(-x)=f(x)$. Donc la fonction f est paire et par suite, la droite d'équation $x=0$ est un axe de symétrie de f.

$$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C} \text{ est symétrique par rapport à } (Oy).}$$

3) a) Soit a un réel positif.

$$f(a)=0\Leftrightarrow 1-\frac{4e^a}{e^{2a}+1}=0\Leftrightarrow\frac{e^{2a}-4e^a+1}{e^{2a}+1}=0\Leftrightarrow e^{2a}-4e^a+1=0\ (\text{car } e^{2a}+1\neq 0)$$
$$\Leftrightarrow (e^a)^2-4(e^a)+1\Leftrightarrow c^2-4c+1=0.$$

Le discriminant de l'équation $x^2-4x+1=0$ est $\Delta=(-4)^2-4\times1\times1=12$. Donc l'équation $x^2-4x+1=0$ admet deux solutions réelles distinctes à savoir $x_1=\dfrac{4+\sqrt{12}}{2}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$ et $x_2=2-\sqrt{3}$.

Ensuite, puisque $2+\sqrt{3}>0$ et $2-\sqrt{3}>0$, pour tout réel x on a

$$f(x)=0\Leftrightarrow e^x=2+\sqrt{3}\text{ ou } e^x=2-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\ln(2+\sqrt{3})\text{ ou } x=\ln(2-\sqrt{3}).$$

Enfin, $\ln(2+\sqrt{3})=1,3\ldots>0$ et $\ln(2-\sqrt{3})=-1,3\ldots<0$. Puisque $a\geqslant 0$, on a donc

$$\boxed{a=\ln(2+\sqrt{3}).}$$

b) Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, si $0\leqslant x<a$, on a $f(x)<f(a)=0$ et si $x>a$, on a $f(x)>0$. Puisque f est paire, on en déduit le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x :

x	$-\infty$		$\ln(2-\sqrt{3})$		$\ln(2+\sqrt{3})$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie B

1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$: la fonction F est la primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Pour tout réel x, on a $F'(x) = f(x)$ dont le signe a été étudié à la question 3)b) de la partie A. On en déduit le tableau de variations de la fonction F :

x	$-\infty$		$\ln(2-\sqrt{3})$		$\ln(2+\sqrt{3})$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
F		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2) D'après la question 3)b) de la partie A, la fonction f est négative sur $[0, a]$ et donc $-F(a)$ est l'aire du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. En particulier, $-F(a) \geqslant 0$ ou encore $F(a) \leqslant 0$.
Notons C le point de coordonnées $(0, f(0)) = (0, -1)$ et D le point de coordonnées $(a, -1)$. Puisque la fonction f est croissante sur $[0, a]$, ce domaine est contenu dans le rectangle $OADC$. Son aire $-F(a)$ est inférieure ou égale à l'aire de ce rectangle c'est-à-dire $1 \times a = a$. Ainsi, $-F(a) \leqslant a$ ou encore $F(a) \geqslant -a$. En résumé,

$$\boxed{-a \leqslant F(a) \leqslant 0.}$$

3) a) Soit t un réel positif. On a $e^{2t} + 1 \geqslant e^{2t} > 0$ et donc $\dfrac{1}{e^{2t}+1} \leqslant \dfrac{1}{e^{2t}}$. Ensuite, puisque $-4e^t < 0$, on en déduit que $-4\dfrac{e^t}{e^{2t}+1} \geqslant -4\dfrac{e^t}{e^{2t}}$ puis que

$$f(t) \geqslant 1 - 4\frac{e^t}{e^{2t}} = 1 - 4e^{-t}.$$

b) Soit x un réel positif. Pour tout réel t de $[0, x]$, $f(t) \geqslant 1 - 4e^{-t}$ et donc, par croissance de l'intégrale, on obtient

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt \geqslant \int_0^x (1 - 4e^{-t})\ dt = \left[t + 4e^{-t}\right]_0^x = x + 4e^{-x} - 4 \geqslant x - 4.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } x,\ F(x) \geqslant x - 4.}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 4 = +\infty$, on en déduit encore que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.}$$

4) Soit t un réel négatif ou nul.

$$f(t) = 1 - \frac{4e^t}{e^{2t}+1} \geqslant 1 - \frac{4e^t}{0+1} = 1 - 4e^t.$$

Soit x un réel strictement négatif. Puisque pour tout réel t de $[x, 0]$ on a $f(t) \geqslant 1 - 4e^t$, par croissance l'intégrale on en déduit que

$$\int_x^0 f(t)\ dt \geqslant \int_x^0 (1 - 4e^t)\ dt = -4 - (x - 4e^x) = -x - 4 + 4e^x$$

et par suite,

$$F(x) = -\int_x^0 f(t)\ dt \leqslant x + 4 - 4e^x.$$

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 4 - 4e^x = -\infty$. Mais alors

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty.}$$

EXERCICE 4

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Si $B = A$, alors $C = A$ puis $c = a$.
Si $B \neq A$, alors $C \neq A$ puis $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \dfrac{|c-a|}{|b-a|} = \dfrac{AC}{AB} = k$ et d'autre part,

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AC}\right) - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \theta\ [2\pi].$$

Donc, $\dfrac{c-a}{b-a}$ est le nombre complexe de module k et d'argument θ ou encore $\dfrac{c-a}{b-a} = ke^{i\theta}$ ou enfin $c = a + ke^{i\theta}(b-a)$.
Cette dernière égalité reste vraie quand $b = a$ et on a montré dans tous les cas que

$$\boxed{c = a + ke^{i\theta}(b-a).}$$

Partie B

1) a) $3 \times (-1) - 2 \times (-2) = -3 + 4 = 1$ et donc le couple $(-1, -2)$ est solution de l'équation (E). En particulier, les entiers 2 et 3 sont premiers entre eux d'après le théorème de Bézout.

b) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$3x - 2y = 1 \Rightarrow 3x - 2y = 3(-1) - 2(-2) \Rightarrow 3(x+1) = 2(y+2).$$

Ainsi, si (x, y) est solution de (E), nécessairement 2 divise $3(x+1)$. Puisque 2 et 3 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que 2 divise $x+1$. Donc il existe un entier relatif k tel que $x + 1 = 2k$ ou encore $x = -1 + 2k$. De même, il existe un entier relatif k' tel que $y + 2 = 3k'$ ou encore $y = -2 + 3k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = -1 + 2k$ et $y = -2 + 3k'$.

$$3x - 2y = 1 \Leftrightarrow 3(-1 + 2k) - 2(-2 + 3k') = 1 \Leftrightarrow 6(k - k') = 0 \Leftrightarrow k' = k.$$

Donc, les couples d'entiers relatifs solutions de (E) sont les couples de la forme $(-1 + 2k, -2 + 3k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \{(-1 + 2k, -2 + 3k),\ k \in \mathbb{Z}\}.}$$

2) a) Soit k un entier relatif. $2x_{A_k} + 4 = 2(k-3) + 4 = 2k - 2 = y_{A_k}$ et donc le point A_k appartient à la droite d.

b) La question 1)b) montre que les seuls points de d' à coordonnées entières sont les points $B_{k'}$ de coordonnées $(2k' - 1, 3k' - 2)$, $k' \in \mathbb{Z}$.

3) a) Soient k et k' deux entiers relatifs.

$$A_k = B_{k'} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k - 3 = 2k' - 1 \\ 2k - 2 = 3k' - 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = 2k' + 2 \\ 2(2k' + 2) - 2 = 3k' - 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k' = -4 \\ k = -6 \end{array}\right.$$

Donc, $A_{-6} = B_{-4}$. De plus, le point A_{-6} a pour coordonnées $(-9, -14)$.

b) Soient k et k' deux entiers relatifs. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A_kB_{k'}}$ sont $(-k + 2k' + 2, -2k + 3k')$. Le segment $[A_kB_{k'}]$ est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{A_kB_{k'}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$ et non nul. Ceci équivaut à $-2k + 3k' = 0$ et $-k + 2k' + 2 \neq 0$.

Maintenant, si $-2k + 3k' = 0$ alors $2k = 3k'$. Par suite, l'entier 3 divise $2k$ et, puisque 2 et 3 sont premiers entre eux, 3 divise k d'après le théorème de Gauss. Donc il existe un entier q tel que $k = 3q$. Dans ce cas, $2k = 3k' \Leftrightarrow 6q = 3k' \Leftrightarrow k' = 2q$. Les couples d'entiers relatifs (k, k') tels que le vecteur $\overrightarrow{A_kB_{k'}}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{u}$ sont les couples de la forme $(3q, 2q)$, $q \in \mathbb{Z}$. De plus, le vecteur $\overrightarrow{A_{3q}B_{2q}}$ est non nul si et seulement si $q \neq -2$ (d'après la question a)).

En résumé, les couples d'entiers relatifs (k, k') tels que le segment $[A_kB_{k'}]$ soit parallèle à l'axe des abscisses sont les couples de la forme $(3q, 2q)$, $q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq -2$.

c) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A_{3q}B_{2q}}$ sont $(q + 2, 0)$. Par suite, $\overrightarrow{A_{3q}B_{2q}} = 4\overrightarrow{u} \Leftrightarrow q + 2 = 4 \Leftrightarrow q = 2$.

4) a) L'écriture complexe de f est $z' = \omega + \dfrac{1}{2}e^{-i\pi/2}(z - \omega) = \omega - \dfrac{i}{2}(z - \omega) = -\dfrac{i}{2}z + \left(1 + \dfrac{i}{2}\right)\omega$.

$$\boxed{\text{L'écriture complexe de f est } z' = -\frac{i}{2}z + \left(1+\frac{i}{2}\right)\omega.}$$

b) Les coordonnées de A_6 sont $(3, 10)$ et les coordonnées de B_4 sont $(7, 10)$. Les coordonnées de H sont donc $(5, 10)$ ou encore l'affixe de H est $5 + 10i$. Par suite,

$$f(H) = O \Leftrightarrow -\frac{i}{2}(5+10i) + \left(1+\frac{i}{2}\right)\omega = 0 \Leftrightarrow (2+i)\omega = i(5+10i) \Leftrightarrow \omega = \frac{-10+5i}{2+i}$$
$$\Leftrightarrow \omega = \frac{(-10+5i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \Leftrightarrow \omega = \frac{-20+10i+10i+5}{2^2+1^2} \Leftrightarrow \omega = \frac{-15+20i}{5} \Leftrightarrow \omega = -3+4i.$$

$$\boxed{\Omega \text{ est le point de coordonnées } (-3, 4).}$$

