BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Pondichéry

EXERCICE 1

Partie I

1. B

2. A

3. C

4. C

1) La fonction f_2 est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = +\infty$.

2) La fonction f_2 est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$. Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x) = 0$

3) On ne peut pas conclure car par exemple les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$ ont un graphe ayant l'allure de $\mathscr{C}_2$, mais seule la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$ admet une asymptote oblique.

4) $\mathscr{C}_2$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_1$ sur $]0,1[$, strictement au-dessous sur $]1,+\infty[$ et enfin, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent en leur point d'abscisse 1. Donc le tableau de signe de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

x	0		1		$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Partie II

1) Limite en 0. Pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x}(x\ln(x) + x - 1)$.

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x\ln(x)+x-1) = -1$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Par suite,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty.}$$

Limite en 0. Pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f(x) = \ln(x) + 1 - \dfrac{1}{x}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$. Par suite,

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

2) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Donc, la fonction f' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ puis la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) On note tout d'abord que $f(1) = \ln(1) + 1 - 1 = 0$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, si x est un réel tel que $0 < x < 1$, on a $f(x) < f(1)$ ou encore $f(x) < 0$. Si x est un réel tel que $x > 1$, on a $f(x) > f(1)$ ou encore $f(x) > 0$. On résule ces résultats dans un tableau.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

4) La fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x} = f(x).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

5) La fonction F est dérivable sur $[1, +\infty[$ et sa dérivée, à savoir f, est strictement positive sur $]1, +\infty[$ d'après la question précédente. Donc, la fonction F est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

6) La fonction F est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Donc pour tout réel k de l'intervalle $\left[F(1), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\right[$, l'équation $F(x) = k$ admet une solution et une seule.

Or, $F(1) = 0$ et donc $F(1) < 1 - \frac{1}{e}$ et d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\ln(x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) > 1 - \frac{1}{e}$.

Ainsi, $1 - \frac{1}{e} \in \left[F(1), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\right[$ et donc l'équation $F(x) = 1 - \frac{1}{e}$ admet une solution et une seule, notée α, dans $[1, +\infty[$.

7) $F(\alpha) = 1 - \frac{1}{e} = 0,63\ldots$ Ensuite, $F(1,9) = 0,57\ldots$ et $F(2) = 0,69\ldots$. Donc $F(1,9) < F(\alpha) < F(2)$. Puisque la fonction F est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit que

$$\boxed{1,9 < \alpha < 2.}$$

Partie III

1) Soit x un réel strictement positif.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

$$\boxed{\text{Le point } A \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{1}{e}, 0\right).}$$

2) Soit x un réel strictement positif.

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow \ln(x) + 1 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

D'après l'étude du signe de la fonction f effectuée à la question II.3), l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule à savoir $x = 1$. Comme $g(1) = h(1) = 1$,

$$\boxed{\text{le point } P \text{ a pour coordonnées } (1, 1).}$$

3) (a) Pour tout réel x de $]0, +\infty[$, on a $g(x) - h(x) = -\ln(x) - 1 + \frac{1}{x} = -f(x)$. D'après la question II.3), la fonction f est négative sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ et donc la fonction $g - h$ est positive sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Par suite,

$$\mathscr{A} = \int_{1/e}^{1} (g(x) - h(x))\, dx = \int_{1/e}^{1} (-f(x))\, dx.$$

(b) D'après la question II.4), on en déduit que

$$\mathscr{A} = [-F(x)]_{1/e}^{1} = -F(1) + F\left(\frac{1}{e}\right) = -0 + \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}\ln(e) + \ln(e) = 1 - \frac{1}{e}.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 1 - \frac{1}{e}.}$$

4) a) Soit t un réel strictement supérieur à 1. Dans ce cas, pour tout réel x de $[1, t]$, on a $h(x) - g(x) = f(x) \geqslant 0$. Par suite,

$$\mathscr{B}_t = \int_1^t (h(x) - g(x))\, dx = \int_1^t f(x)\, dx = [F(x)]_1^t = F(t) - F(1) = F(t) = t\ln(t) - \ln(t).$$

(b) Soit $t \geqslant 1$. D'après la question II.6),

$$\mathcal{B}_t = \mathscr{A} \Leftrightarrow F(t) = 1 - \frac{1}{e} \Leftrightarrow t = \alpha.$$

Il existe un réel t et un seul tel que $\mathscr{B}_t = \mathscr{A}$: le réel α défini à la question II.6).

EXERCICE 2

Partie A

1) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in \mathscr{E}_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ z = (x-y)^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ (x-y)^2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ y = x \end{array} \right. .$$

Ainsi, dans le plan $\mathscr{P}_1$ rapporté au repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, $\mathscr{E}_1$ est l'ensemble d'équation $y = x$.

$$\boxed{\mathscr{E}_1 \text{ est une droite.}}$$

2) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in \mathscr{E}_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ z = (x-y)^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ z = (1-y)^2 \end{array} \right. .$$

Ainsi, dans le plan $\mathscr{P}_2$ rapporté au repère $\left(O', \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ où O' a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, $\mathscr{E}_2$ est l'ensemble d'équation $z = (1-y)^2$.

$$\boxed{\mathscr{E}_2 \text{ est une parabole.}}$$

Partie B

1) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in \mathscr{E}_3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ z = xy \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ xy = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. .$$

Ainsi, dans le plan $\mathscr{P}_1$ rapporté au repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, $\mathscr{E}_3$ est la réunion des ensembles d'équations respectives $x = 0$ et $y = 0$.

$$\boxed{\mathscr{E}_3 \text{ est la réunion de deux droites perpendiculaires.}}$$

2) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in \mathscr{E}_4 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 1 \\ z = xy \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 1 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{array} \right. .$$

Ainsi, dans le plan $\mathscr{P}_3$ rapporté au repère $\left(O'', \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où O'' a pour coordonnées $(0, 0, 1)$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, $\mathscr{E}_4$ est l'ensemble d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

$$\boxed{\mathscr{E}_4 \text{ est une hyperbole.}}$$

Partie C

1) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. $M \in \mathscr{E}_5 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = xy \\ z = (x-y)^2 \end{array} \right.$ et en particulier $(x-y)^2 = xy$. Si de plus, $x = 0$, alors $(0-y)^2 = 0$ puis $y = 0$ et enfin, $z = 0 \times 0 = 0$. Donc, si M est un point de $\mathscr{E}_5$ tel que $x = 0$, alors $M = O$. De même, si $y = 0$ alors $M = O$.

2) (a) On suppose que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. On note d le PGCD de x et y. On sait qu'il existe deux entiers naturels non nuls premiers entre eux x' et y' tels que $x = dx'$ et $y = dy'$.

$$(x-y)^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - 3xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow d^2(x'^2 - 3x'y' + y'^2) = 0 \Leftrightarrow x'^2 - 3x'y' + y'^2 = 0.$$

(b) On a donc $y'^2 = -x'^2 + 3x'y' = x'(-x' + 3y')$. Par suite, l'entier x' divise l'entier y'^2.
L'entier x' divise l'entier $y' \times y'$ et l'entier x' est premier à l'entier y'. Donc, d'après le théorème de Gauss, l'entier x' divise l'entier y'.
On en déduit que le PGCD de x' et y' est x'. Mais le PGCD de x' et y' est 1 et donc $x' = 1$.

(c) Les égalités $x' = 1$ et $x'^2 - 3x'y' + y'^2 = 0$ fournissent alors $1 - 3y' + y'^2 = 0$.

(d) Le discriminant de l'équation $t^2 - 3t + 1 = 0$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$. Les solutions de cette équation sont $t_1 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,3\ldots$ et $t_2 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} = 2,6\ldots$.

Ainsi, il n'y a pas de nombre entier y' vérifiant $1 - 3y' + y'^2 = 0$ et il n'est donc pas possible que $x \neq 0$. Donc $x = 0$ et d'après la question 1), seul le point O peut être un point de $\mathscr{E}_5$ à coordonnées entières. Réciproquement, le point O est effectivement un point de $\mathscr{E}_5$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.

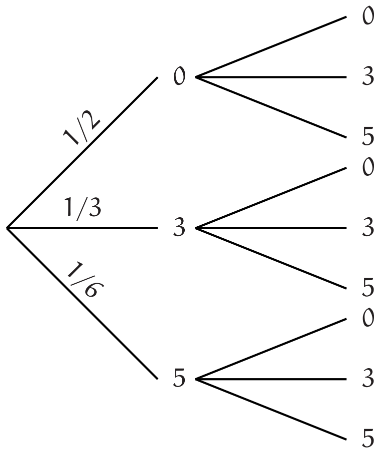
EXERCICE 3

1) On a $p_5 = \dfrac{1}{3}p_0$ puis $p_3 = 2p_5 = \dfrac{2}{3}p_0$.

L'égalité $p_0 + p_3 + p_5 = 1$ fournit alors $\left(1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\right) p_0 = 1$ puis $p_0 = \dfrac{1}{2}$, $p_3 = \dfrac{1}{3}$ et $p_5 = \dfrac{1}{6}$.

$$\boxed{p_0 = \frac{1}{2},\ p_3 = \frac{1}{3} \text{ et } p_5 = \frac{1}{6}.}$$

2) (a) Représentons la situation par un arbre.



Les événements amenant au gain de la partie en deux lancers sont (3 points, 5 points), (5points, 3 points) et (3 points, 5 points).
Leurs probabilités respectives sont $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{18}$, $\dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{18}$ et $\dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$. Donc

$$p(G_2) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}.$$

$$\boxed{p(G_2) = \frac{5}{36}.}$$

(b) D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que le joueur gagne la partie est

$$p(G) = p(G_2) + p(G_3) = \frac{5}{36} + \frac{7}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

et donc $p(P) = 1 - p(G) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{p(P) = \frac{2}{3}.}$$

3) Notons Y le nombre de fois que l'événement P est réalisé. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 6 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'événement P est réalisé » avec une probabilité $p = \dfrac{2}{3}$ ou « l'événement $\overline{P}$ est réalisé » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{1}{3}$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 6$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est $p(Y \leqslant 5)$. Or

$$p(Y \leqslant 5) = 1 - p(Y = 6) = 1 - \binom{6}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

$$\boxed{\text{La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est } 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 \text{ ou encore } 0,91 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

4) (a) Loi de probabilité de X. D'après les questions précédentes, $p(X=-2)=p(P)=\dfrac{2}{3}$ puis $p(X=1)=p(G_3)=\dfrac{7}{36}$ et $p(X=3)=p(G_2)=\dfrac{5}{36}$. Résumons ces résultats dans un tableau.

Valeurs prises par X : x_i	-2	1	3
$p(X=x_i)$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{7}{36}$	$\dfrac{5}{36}$

(b) $E(X)=\dfrac{2}{3}\times(-2)+\dfrac{7}{36}\times 1+\dfrac{5}{36}\times 3=-\dfrac{4}{3}+\dfrac{22}{36}=-\dfrac{24}{18}+\dfrac{11}{18}=-\dfrac{13}{18}$.

$$\boxed{E(X)=-\dfrac{13}{18}.}$$

Puisque $E(X)<0$, le jeu est défavorable au joueur.