

BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Polynésie

EXERCICE 1

1. VRAI
2. VRAI
3. FAUX
4. VRAI
5. VRAI

Justification 1. • $OA = |z_A| = |2 - 5i| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$.

• $OB = |z_B| = |7 - 3i| = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{58}$.

• $AB = |z_B - z_A| = |(7 - 3i) - (2 - 5i)| = |5 + 2i| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

Donc, $AB = AO$ et le triangle OAB est isocèle en A . De plus, $AO^2 + AB^2 = 29 + 29 = 58 = OB^2$ et d'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, le triangle OAB est rectangle en A . Finalement, le triangle OAB est rectangle et isocèle en A et la proposition 1 est vraie.

Justification 2. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned} |z - i| = |z + 2i| &\Leftrightarrow |x + i(y - 1)|^2 = |x + i(y + 2)|^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = x^2 + (y + 2)^2 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = y^2 + 4y + 4 \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(Δ) est donc une droite parallèle à l'axe des abscisses qui est l'axe des réels. La proposition 2 est vraie.

Justification 3. $3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2\sqrt{3}e^{i\pi/6}$. Ensuite, si n est un entier naturel non nul,

$$z^{3n} = \left(2\sqrt{3}e^{i\pi/6}\right)^{3n} = \left(2\sqrt{3}\right)^{3n} e^{i3n\pi/6} = \left(2\sqrt{3}\right)^{3n} e^{in\pi/2}.$$

En particulier, si $n = 2$, on obtient

$$z^6 = z^{3 \times 2} = \left(2\sqrt{3}\right)^{3 \times 2} e^{i2\pi/2} = -\left(2\sqrt{3}\right)^6$$

qui n'est pas un imaginaire pur. Donc la proposition 3 est fausse.

Justification 4. Un nombre complexe non nul d'argument $\frac{\pi}{2}$ est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive. Posons $z = iy$ où y est un réel strictement positif.

$|i + z| = |i(y + 1)| = |i| |y + 1| = y + 1$ et $1 + |z| = 1 + |iy| = 1 + |i| |y| = y + 1$. Donc $|i + z| = 1 + |z|$ et la proposition 4 est vraie.

Justification 5. Soit z un nombre complexe de module 1. Il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$. Alors

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = (e^{i\theta})^2 + \frac{1}{(e^{i\theta})^2} = e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) + \cos(2\theta) - i \sin(2\theta) = 2 \cos(2\theta).$$

Donc $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un nombre réel et la proposition 5 est vraie.

EXERCICE 2

1) $u_1 = 10 \times 1 + 21 = 31$, $u_2 = 10 \times 31 + 21 = 331$ et $u_3 = 10 \times 331 + 21 = 3331$.

$$u_1 = 31, u_2 = 331 \text{ et } u_3 = 3331.$$

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

- $10^{0+1} - 7 = 10 - 7 = 3 = 3u_0$ et donc, l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $3u_n = 10^{n+1} - 7$. Alors

$$3u_{n+1} = 3(10u_n + 21) = 10(3u_n) + 63 = 10(10^{n+1} - 7) + 63 = 10^{n+2} - 7.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\text{Pour tout entier naturel } n, 3u_n = 10^{n+1} - 7.$$

b) $10^{n+1} - 7 = \underbrace{10\dots0}_{n+1} - 7 = \underbrace{9\dots9}_n 3$ puis en divisant par 3, $u_n = \frac{10^{n+1} - 7}{3} = \underbrace{3\dots3}_n 1$.

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ l'écriture décimale de } u_n \text{ est } \underbrace{3\dots3}_n 1.$$

3) $u_2 = 331$ puis $\sqrt{u_2} = 18,1\dots$. Les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{u_2}$ sont 2, 3, 5, 7, 11, 13 et 17. 331 n'est divisible par aucun de ces nombres (d'après la calculatrice) et on sait alors que

$$u_2 \text{ est un nombre premier.}$$

4) Soit n un entier naturel. D'après la question 2)b), le chiffre des unités de u_n est 1. Donc u_n n'est ni divisible par 2, ni divisible par 5.

Toujours d'après la question 2)b), la somme des chiffres de u_n est $3n + 1$. La somme des chiffres de u_n n'est pas divisible par 3 et on sait alors que u_n n'est pas divisible par 3.

$$\text{Pour tout entier naturel } n, u_n \text{ n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.}$$

5) a) Soit n un entier naturel. $10 \equiv -1 \pmod{11}$ et donc $10^{n+1} \equiv (-1)^{n+1} \pmod{11}$ ou encore $10^{n+1} \equiv -(-1)^n \pmod{11}$. Ensuite, $-7 \equiv 4 \pmod{11}$. D'après la question 2)a), $3u_n = -7 + 10^{n+1}$ et donc $3u_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$.

$$\text{Pour tout entier naturel } n, 3u_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}.$$

b) Si n est pair, $3u_n \equiv 3 \pmod{11}$ et si n est impair, $3u_n \equiv 5 \pmod{11}$. En particulier, dans tous les cas, $3u_n \not\equiv 0 \pmod{11}$ ou encore $3u_n$ n'est pas un multiple de 11. Il en est de même de u_n car si u_n était un multiple de 11, il en serait de même de $3u_n$.

$$\text{Pour tout entier naturel } n, u_n \text{ n'est pas divisible par 11.}$$

6) a) L'entier 10 n'est pas divisible par le nombre premier 17 et donc, d'après le petit théorème de FERMAT,

$$10^{16} \equiv 1 \pmod{17}.$$

b) Soit k un entier naturel. D'après la question 2)a), $3u_{16k+8} = 10^{16k+9} - 7$.

D'après la question a), puisque $10^{16k+9} = (10^{16})^k \times 10^9$, on a $10^{16k+9} \equiv 1^k \times 10^9 \pmod{17}$ ou encore

$$10^{16k+9} \equiv 10^9 \pmod{17}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} 10^9 &\equiv (-7)^9 \pmod{17} \Rightarrow 10^9 \equiv 49^4 \times (-7) \pmod{17} \Rightarrow 10^9 \equiv (-2)^4 \times (-7) \pmod{17} \\ &\Rightarrow 10^9 \equiv (-1) \times (-7) \pmod{17} \Rightarrow 10^9 \equiv 7 \pmod{17}, \end{aligned}$$

et finalement $10^{16k+9} - 7 \equiv 0 \pmod{17}$. Ainsi, $3u_{16k+8}$ est divisible par 17.

Puisque 17 divise $3u_{16k+8}$ et que 17 est premier à 3, le théorème de GAUSS permet d'affirmer que 17 divise u_{16k+8} .

$$\text{Pour tout entier naturel } k, u_{16k+8} \text{ est divisible par 17.}$$

EXERCICE 3

PARTIE A : Restitution organisée de connaissances

Soient u et v deux fonction dérivables sur un intervalle $[a, b]$ telles que les fonctions u' et v' soient continues sur $[a, b]$. Alors, les fonctions $u'v$ et uv' sont définies et continues sur $[a, b]$ et il en est de même de la fonction $u'v + uv' = (uv)'$.

Par suite, les trois intégrales $\int_a^b u'(x)v(x) dx$, $\int_a^b u(x)v'(x) dx$ et $\int_a^b (uv)'(x) dx$ existent. De plus,

$$\begin{aligned} \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx &= \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_a^b (uv)'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b \text{ (car } uv \text{ est une primitive de } (uv)' \text{ sur } [a, b]) \\ &= u(b)v(b) - u(a)v(a), \end{aligned}$$

et donc

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

On a démontré la formule d'intégration par parties.

PARTIE B

1) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

b) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif,

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1).$$

Sur $]0, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $2 \ln x + 1$. Or,

$$\begin{aligned} 2 \ln x + 1 > 0 &\Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{-1/2} \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \text{ et de même,} \\ 2 \ln x + 1 = 0 &\Leftrightarrow x = e^{-1/2}. \end{aligned}$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0, e^{-1/2}]$ et strictement croissante sur $[e^{-1/2}, +\infty[$.

2) Soit a un réel strictement positif. Une équation de la tangente (T_a) à la courbe (\mathcal{C}) au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ ou encore $y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$. Cette tangente passe par O si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$. Puis,

$$\begin{aligned} f(a) - af'(a) = 0 &\Leftrightarrow a^2 \ln a - a^2(2 \ln a + 1) = 0 \Leftrightarrow a^2(-\ln a - 1) = 0 \Leftrightarrow -\ln a - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln a = -1 \\ &\Leftrightarrow a = e^{-1}. \end{aligned}$$

De plus, une équation de $(T_{e^{-1}})$ est $y = f'(e^{-1})x$ avec $f'(e^{-1}) = e^{-1}(2 \ln(e^{-1}) + 1) = e^{-1}(2 \times (-1) + 1) = -\frac{1}{e}$. En résumé, une et une seule des tangentes à la courbe (\mathcal{C}) passe par O à savoir la tangente en son point d'abscisse $\frac{1}{e}$ d'équation $y = -\frac{x}{e}$.

3) a) La fonction $g : x \mapsto \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif,

$$g'(x) = \frac{1}{25} \left(5x^4(5 \ln x - 1) + x^5 \times \frac{5}{x} \right) = \frac{1}{25} (25x^4 \ln x - 5x^4 + 5x^4) = x^4 \ln x.$$

Donc la fonction $x \mapsto \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x^4 \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

b) On a $V = \int_{1/e}^1 \pi(x^2 \ln x)^2 dx = \pi \int_{1/e}^1 x^4 \ln^2 x dx$. Calculons $I = \int_{1/e}^1 x^4 \ln^2 x dx = \int_{1/e}^1 (\ln x) \times (x^4 \ln x) dx$ par parties.

Pour x dans $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, posons $u(x) = \ln x$ et $v(x) = \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1)$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x dans $[0, 1]$ on a

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x & v(x) &= \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1) \\ u'(x) &= \frac{1}{x} & v'(x) &= x^4 \ln x \end{aligned}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/e}^1 (\ln x) \times (x^4 \ln x) \, dx = \left[\ln x \times \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1) \right]_{1/e}^1 - \int_{1/e}^1 \frac{1}{x} \times \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1) \, dx \\ &= -\ln(e^{-1}) \frac{1}{25e^5}(5 \ln(e^{-1}) - 1) - \int_{1/e}^1 \frac{x^4}{25}(5 \ln x - 1) \, dx \quad (\text{car } \ln 1 = 0) \\ &= \frac{1}{25e^5}(-5 - 1) - \int_{1/e}^1 \frac{x^4}{25}(5 \ln x - 1) \, dx \quad (\text{car } \ln(e^{-1}) = -1) \\ &= -\frac{6}{25e^5} - \frac{1}{5} \int_{1/e}^1 x^4 \ln x \, dx + \frac{1}{25} \int_{1/e}^1 x^4 \, dx \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= -\frac{6}{25e^5} - \frac{1}{5} \left[\frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1) \right]_{1/e}^1 + \frac{1}{25} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{1/e}^1 = -\frac{6}{25e^5} - \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{25} + \frac{6}{25e^5} \right) + \frac{1}{125} \left(1 - \frac{1}{e^5} \right) \\ &= \frac{2}{125} + \frac{-30 - 6 - 1}{125e^5} = \frac{1}{125} \left(2 - \frac{37}{e^5} \right), \end{aligned}$$

et donc

$$V = \frac{\pi}{125} \left(2 - \frac{37}{e^5} \right).$$

EXERCICE 4

Partie A

1) Puisque $1 + 2 = 3 \neq 0$, le point K est bien défini. Dans le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$, le point D a pour coordonnées $(0, 0, 0)$ et le point F a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ (car $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = 1 \overrightarrow{DA} + 1 \overrightarrow{DC} + 1 \overrightarrow{DH}$).

Donc les coordonnées du point K sont $\left(\frac{x_D + 2x_F}{1+2}, \frac{y_D + 2y_F}{1+2}, \frac{z_D + 2z_F}{1+2}\right)$ ou encore $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Les coordonnées du point K sont $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

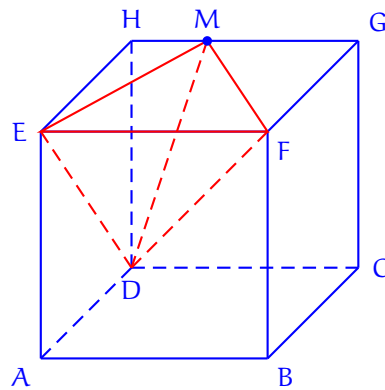
2) Dans le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$, le point E a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. Donc le vecteur \overrightarrow{EK} a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ et le vecteur \overrightarrow{DF} a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ puis

$$\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{DF} = \left(-\frac{1}{3}\right) \times 1 + \frac{2}{3} \times 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 1 = 0.$$

Donc, les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

3) $EK = \|\overrightarrow{EK}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$

Partie B



1) Notons V le volume du tétraèdre EMFD. La projection orthogonale du point D sur le plan (EMF) est le point H. Donc

$$V = \frac{1}{3} \times DH \times \text{aire de } (EMF) = \frac{\text{aire de } (EMF)}{3}.$$

Ensuite, $\text{aire de } (EMF) = \frac{EF \times d(M, (EF))}{2} = \frac{EF \times HE}{2} = \frac{1}{2}$ et finalement $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$

$V = \frac{1}{6}.$

2) Dans le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$, le point D a pour coordonnées $(0, 0, 0)$, le point F a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ et le point M a pour coordonnées $(0, m, 1)$.

Le vecteur \overrightarrow{DM} a pour coordonnées $(0, m, 1)$ et le vecteur \overrightarrow{DF} a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DF}$ alors nécessairement $0 = k \times 1$ et aussi $1 = k \times 1$ ce qui impose $k = 0$ et aussi $k = 1$. Ceci est impossible et donc les vecteurs \overrightarrow{DM} et \overrightarrow{DF} ne sont pas colinéaires ou encore les points D, F et M ne sont pas alignés. Les points D, F et M définissent donc un unique plan.

Soit \mathcal{P} le plan d'équation $(-1 + m)x + y - mz = 0$.

- $(-1 + m)x_D + y_D - mz_D = (-1 + m) \times 0 + 0 - m \times 0 = 0 + 0 + 0 = 0$. Donc $D \in \mathcal{P}$.
- $(-1 + m)x_M + y_M - mz_M = (-1 + m) \times 0 + m - m \times 1 = 0 + m - m = 0$. Donc $M \in \mathcal{P}$.
- $(-1 + m)x_F + y_F - mz_F = (-1 + m) \times 1 + 1 - m \times 1 = -1 + m + 1 - m = 0$. Donc $F \in \mathcal{P}$.

En résumé, les points D, M et F appartiennent à \mathcal{P} ce qui montre que \mathcal{P} est le plan (MFD) ou encore que

une équation cartésienne du plan (MFD) est $(-1 + m)x + y - mz = 0$.

3) a) Soit m un réel de $[0, 1]$. Dans le repère $(D, \overrightarrow{D\vec{A}}, \overrightarrow{D\vec{C}}, \overrightarrow{D\vec{H}})$, le point E a pour coordonnées $(1, 0, 1)$ et donc

$$d_m = \frac{|(-1+m)x_E + y_E - mz_E|}{\sqrt{(-1+m)^2 + 1^2 + (-m)^2}} = \frac{|(-1+m) + 0 - m|}{\sqrt{m^2 - 2m + 1 + 1 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}.$$

b) Soit $m \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} 2m^2 - 2m + 2 &= 2(m^2 - m + 1) = 2\left(\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = 2\left(\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) \\ &= 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Par suite, pour tout $m \in [0, 1]$, $2m^2 - 2m + 2 \geq \frac{3}{2}$ avec égalité si et seulement si $m = \frac{1}{2}$ puis $d_m \leq \frac{1}{\sqrt{3/2}}$ avec égalité si et seulement si $m = \frac{1}{2}$. En résumé, la distance d_m est maximale si et seulement si $m = \frac{1}{2}$ ou encore si et seulement si M est le milieu du segment $[HG]$.

La distance d_m est maximale quand M est le milieu de $[HG]$.

c) Quand $m = \frac{1}{2}$, une équation du plan (MFD) est $-\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z = 0$ ou encore $x - 2y + z = 0$. Tout d'abord, $x_K - 2y_K + z_K = \frac{2}{3} - 2 \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$ et donc le point K appartient au plan (MFD).

Ensuite, un vecteur normal au plan (MFD) est le vecteur \vec{n} de coordonnées $(1, -2, 1)$. D'autre part, d'après la question A.2), les coordonnées du vecteur \overrightarrow{EK} sont $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Par suite, $\overrightarrow{EK} = -\frac{1}{3}\vec{n}$ et en particulier, \overrightarrow{EK} est un vecteur non nul colinéaire à \vec{n} ou encore le vecteur \overrightarrow{EK} est un vecteur normal au plan (MFD).

En résumé, le point K appartient au plan (MFD) et le vecteur \overrightarrow{EK} est orthogonal au plan (MFD). On en déduit que

quand d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal du point E sur le plan (MFD).