BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Liban

EXERCICE 1

1) a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-4, -4, 4)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-1, -4, -2)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors nécessairement $-1 = -4k$ et $-4 = -4k$. Ceci impose à la fois $k = \dfrac{1}{4}$ et $k = 1$ ce qui est impossible. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore

$$\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés.}}$$

b) Les points A, B et C définissent donc un unique plan et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires de ce plan. Ensuite,

- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2 \times (-4) + (-1) \times (-4) + 1 \times 4 = -8 + 4 + 4 = 0$.
- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times (-4) + 1 \times (-2) = -2 + 4 - 2 = 0$.

Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et finalement

$$\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ est un vecteur normal au plan } (ABC).}$$

2) Un vecteur normal au plan (ABC) est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2, -1, 1)$ et un vecteur normal au plan (P) est le vecteur $\overrightarrow{n}'$ de coordonnées $(1, 1, -1)$. De plus,

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}' = 2 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times (-1) = 2 - 1 - 1 = 0.$$

Donc les vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont orthogonaux ou encore

$$\boxed{\text{les plans } (ABC) \text{ et } (P) \text{ sont perpendiculaires.}}$$

3) a) Tout d'abord $1 - 1 + 2 = 2 \neq 0$ et donc G existe. Ensuite,

- $x_G = \dfrac{x_A - x_B + 2x_C}{1 - 1 + 2} = \dfrac{1 + 3 + 0}{2} = 2$.
- $y_G = \dfrac{y_A - y_B + 2y_C}{1 - 1 + 2} = \dfrac{2 + 2 - 4}{2} = 0$.
- $z_G = \dfrac{z_A - z_B + 2z_C}{1 - 1 + 2} = \dfrac{-1 - 3 - 6}{2} = -5$.

$$\boxed{\text{Les coordonnées du point } G \text{ sont } (2, 0, -5).}$$

b) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CG}$ sont $(2, 2, -2)$. Donc $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{n}'$ où $\overrightarrow{n}'$ est le vecteur normal à P défini à la question 2). Le vecteur $\overrightarrow{CG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}'$ et n'est pas nul. Donc $\overrightarrow{CG}$ est aussi un vecteur normal à (P) ou encore

$$\boxed{\text{la droite } (CG) \text{ est orthogonale au plan } (P).}$$

c) La droite (CG) est la droite passant par le point C de coordonnées $(0, -2, -3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}'$ de coordonnées $(1, 1, -1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (CG) est

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \\ z = -3 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

d) Soit $M(t, -2+t, -3-t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (CG).

$$M \in (P) \Leftrightarrow t + (-2+t) - (-3-t) + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Quand $t = -1$, on obtient les coordonnées du point H : $(-1, -3, -2)$.

$$\boxed{\text{Le point } H \text{ a pour coordonnées } (-1, -3, -2).}$$

4) Soit M un point de l'espace. On sait que $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (1 - 1 + 2)\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MG}$ et donc

$$M \in (S) \Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MG}\right\| = 12 \Leftrightarrow 2MG = 12 \Leftrightarrow MG = 6.$$

$$\boxed{(S) \text{ est la sphère de centre } G \text{ et de rayon } R = 6.}$$

5) La distance d du centre G de la sphère (S) au plan (P) est

$$d = \frac{|2 + 0 - (-5) + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

Puisque $d = 3\sqrt{3} = 5,1\ldots$ et que $R = 6$, on a $d < R$ et on sait que $(P) \cap (S)$ est un cercle de rayon

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{36 - 27} = \sqrt{9} = 3.$$

Le centre de ce cercle est le projeté orthogonal du point G sur le plan (P) c'est-à-dire le point H de coordonnées $(-1, -3, -2)$ d'après les questions 3)b) et 3)d).

$$\boxed{(P) \cap (S) \text{ est le cercle du plan } (P) \text{ de centre } H(-1, -3, -2) \text{ et de rayon } r = 3.}$$

EXERCICE 2

1.a)	**Réponse D**
1.b)	**Réponse B**
1.c)	**Réponse A**
2.a)	**Réponse C**
2.b)	**Réponse A**
2.c)	**Réponse C**

Explication 1.a) On note N (respectivement B) l'événement « l'ordinateur choisi est noir (respectivement blanc) » et M_1 (respectivement M_2) l'événement « l'ordinateur choisi est de la marque M_1 (respectivement M_2) ». La probabilité demandée est $p(M_2 \cap N)$.

L'énoncé donne $p\left(\overline{M_2}\right) = p(M_1) = 0,7$ et donc $p(M_2) = 0,3$. L'énoncé donne aussi $p_{M_2}\left(\overline{N}\right) = p_{M_2}(B) = 0,2$ et donc $p_{M_2}(N) = 0,8$. La probabilité demandée est $p(M_2 \cap N)$ et on a

$$p(M_2 \cap N) = p(M_2) \times p_{M_2}(N) = 0,3 \times 0,8 = 0,24 = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}.$$

.

La bonne réponse est la réponse D.

Explication 1.b) La probabilité demandée est $p(N)$. La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$\begin{aligned} p(N) &= p(N \cap M_1) + p(N \cap M_2) = p(M_1) \times p_{M_1}(N) + p(M_2) \times p_{M_2}(N) = 0,7 \times 0,6 + 0,3 \times 0,8 = 0,42 + 0,24 \\ &= 0,66 = \frac{66}{100} = \frac{33}{50}. \end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse B.

Explication 1.c) La probabilité demandée est $p_N(M_2)$.

$$p_N(M_2) = \frac{p(M_2 \cap N)}{p(N)} = \frac{6/25}{33/50} = \frac{12}{33} = \frac{4}{11}.$$

La bonne réponse est la réponse A.

Explication 2.a) Le nombre de tirages simultanés de trois boules parmi les neuf boules de l'urne est

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84.$$

Les trois boules tirées sont de même couleur si et seulement si les trois boules sont jaunes ou les trois boules sont bleues. Il y a $\binom{4}{3} = 4$ tirages simultanés de trois boules parmi les quatre jaunes et $\binom{3}{3} = 1$ tirage simultané de trois boules parmi les trois bleues. Le nombre de tirages simultanés de trois boules de même couleur est donc $4 + 1 = 5$ puis la probabilité demandée est $\frac{5}{84}$. La bonne réponse est la réponse C.

Explication 2.b) Le nombre de tirages simultanés fournissant trois couleurs différentes est

$$\binom{4}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} = 4 \times 2 \times 3 = 24.$$

La probabilité d'obtenir trois boules de couleurs différentes est donc $\frac{24}{84} = \frac{2}{7}$.
La bonne réponse est la réponse A.

Explication 2.c) On note n le nombre de fois que l'on répète l'expérience et X le nombre de fois que l'on obtient 3 boules jaunes. Cette expérience suit un schéma de BERNOULLI. En effet, on recommence n fois la même expérience de manière indépendante et à chaque expérience, on a deux éventualités « obtenir trois boules jaunes » avec une probabilité $p = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$ et « ne pas obtenir trois boules jaunes » avec une probabilité $1 - p = \frac{20}{21}$.

La probabilité d'obtenir au moins une fois trois boules jaunes en n essais est

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{20}{21}\right)^n \leqslant 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{21}{20}\right)^n \geqslant 100 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{21}{20}\right)^n\right) \geqslant \ln(100) \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{21}{20}\right) \geqslant \ln(100) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(100)}{\ln(21/20)} \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 94,3\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 95.
\end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse C.

EXERCICE 3

PARTIE A : Restitution organisée de connaissances

Soient A, B, A' et B' quatre points tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. On note respectivement a, b, a' et b' les affixes de ces points.
Soient α et β deux nombres complexes, $\alpha \neq 0$, puis s la similitude d'expression complexe $z' = \alpha z + \beta$.

$$\left\{\begin{array}{l} s(A) = A' \\ s(B) = B' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} a' = \alpha a + \beta & (\text{I}) \\ b' = \alpha b + \beta & (\text{II}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} a' = \alpha a + \beta & (\text{I}) \\ b' - a' = \alpha(b-a) & (\text{II}) - (\text{I}) \end{array}\right.$$

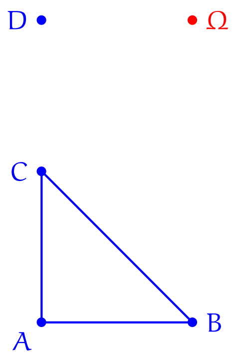
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{b'-a'}{b-a} \\ a' = \dfrac{b'-a'}{b-a}a + \beta \end{array}\right. \quad (\text{car } b \neq a)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{b'-a'}{b-a} \\ \beta = a' - \dfrac{b'-a'}{b-a}a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{b'-a'}{b-a} \\ \beta = \dfrac{a'b - ab'}{b-a} \end{array}\right. .$$

De plus, $\alpha \neq 0$ car $a' \neq b'$. Donc il existe une unique similitude directe s telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$. Le rapport de s est $k = |\alpha| = \left|\dfrac{b'-a'}{b-a}\right| = \dfrac{A'B'}{AB}$ et l'angle de s est $\theta = \arg(\alpha) = \arg\left(\dfrac{b'-a'}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$ $[2\pi]$.

PARTIE B

1) Puisque $C \neq D$ et $B \neq C$, il existe une similitude directe s et une seule telle que $s(D) = C$ et $s(C) = B$.



Le rapport de s est

$$k = \frac{s(C)s(D)}{CD} = \frac{BC}{CD} = \frac{AB\sqrt{2}}{AB} = \sqrt{2}.$$

L'angle de s est

$$\theta = \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{s(C)s(D)}\right) = \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{4} \ [2\pi].$$

$$\boxed{\text{Le rapport de } s \text{ est } \sqrt{2} \text{ et l'angle de } s \text{ est } \frac{\pi}{4}.}$$

2) a) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D\Omega} + \overrightarrow{\Omega C} = \overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega D}$ et donc

$$DC^2 = \overrightarrow{DC}^2 = \left(\overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega D}\right)^2 = \overrightarrow{\Omega C}^2 - 2\overrightarrow{\Omega C}.\overrightarrow{\Omega D} + \overrightarrow{\Omega D}^2 = \Omega C^2 - 2\Omega C\ \Omega D \cos\left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega D}\right) + \Omega D^2$$
$$= (\sqrt{2}\Omega D)^2 - 2\sqrt{2}\Omega D \times \Omega D \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \Omega D^2 \ \left(\text{car } \Omega C = s(\Omega)s(D) = \sqrt{2}\Omega D \text{ et } \left(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega C}\right) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]\right)$$
$$= 2\Omega D^2 - 2\Omega D^2 + \Omega D^2 = \Omega D^2.$$

On a montré que

$$\boxed{DC^2 = \Omega D^2.}$$

b) Par suite, $\Omega D = CD$ et donc le triangle $CD\Omega$ est isocèle en D. De plus, $\left(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega C}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ et en particulier, $\widehat{D\Omega C} = 45°$. On en déduit que $\widehat{DC\Omega} = 45°$ puis que $\widehat{CD\Omega} = 90°$. Donc

$$\boxed{\text{le triangle } \Omega DC \text{ est isocèle et rectangle en D.}}$$

3) a) On sait que σ est une similitude plane directe de centre Ω, de rapport $k^2 = 2$ et d'angle $2\theta = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

b) $\sigma(D) = s(s(D)) = s(C) = B$.

4) D'après l'énoncé, $\widehat{DAB} = \widehat{CAB} = 90°$. D'après la question 2)b), $\widehat{AD\Omega} = 90°$. D'après la question précédente, $\left(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega B}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ et en particulier, $\widehat{D\Omega B} = 90°$. Ainsi, le quadrilatère $AD\Omega B$ a trois angles droits et donc

$$\boxed{\text{le quadrilatère } AD\Omega B \text{ est un rectangle.}}$$

5) a) D'après la partie A, si on note $z' = az + b$ l'écriture complexe de s,

$$a = \frac{z_{D'} - z_{C'}}{z_D - z_C} = \frac{z_C - z_B}{z_D - z_C} = \frac{i-1}{2i - i} = \frac{i}{i} - \frac{1}{i} = 1 + i$$

et

$$b = \frac{z_{C'}z_D - z_{D'}z_C}{z_D - z_C} = \frac{z_B z_D - z_C^2}{z_D - z_C} = \frac{2i - i^2}{2i - i} = \frac{2i}{i} + \frac{1}{i} = 2 - i.$$

$$\boxed{\text{L'écriture complexe de } s \text{ est } z' = (1+i)z + 2 - i.}$$

b)

$$x' + iy' = (1+i)(x+iy) + 2 - i = x + iy + ix - y + 2 - i = (x - y + 2) + i(x + y - 1).$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{array}\right. .}$$

c) Soient x et y deux entiers relatifs puis M le point du plan de coordonnées (x, y).

$$\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{AJ} = 0 \Leftrightarrow (x - y + 2) + 3(x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y = 1.$$

Maintenant, $4x + 2y \equiv 0$ [2]. Donc, $4x + 2y \not\equiv 1$ [2] et en particulier, $4x + 2y \neq 1$. Le problème posé n'a pas de solution.

EXERCICE 4

Partie A

1) La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel x positif,

$$f'(x) = 1 + (-1)e^{-x} = 1 - e^{-x}.$$

Soit $x > 0$. Alors, $-x < 0$ puis $e^{-x} < 1$ et donc $1 - e^{-x} > 0$. Ainsi, la fonction f' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Donc,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

Partie B

1) La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

La fonction g' est positive sur $[0,+\infty[$ est donc la fonction g est croissante sur $[0,+\infty[$. Puisque $g(0) = 0 - \ln(1) = 0$, on en déduit que pour $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ ou encore $\ln(1+x) \leqslant x$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \leqslant x.}$$

2) Soit n un entier naturel non nul. On applique l'inégalité précédente au réel positif $x = \dfrac{1}{n}$. On obtient $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$ ou encore $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$ ou encore $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$ ou enfin $\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ \ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \frac{1}{n}.}$$

3) Soit n un entier naturel non nul.

$$f(\ln(n)) = \ln(n) + e^{-\ln(n)} = \ln(n) + \frac{1}{e^{\ln(n)}} = \ln(n) + \frac{1}{n}.$$

4) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $\ln(n) \leqslant u_n$.
• Pour $n = 1$, $u_1 = 0$ et $\ln(1) = 0$. Donc $\ln(1) \leqslant u_1$.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\ln(n) \leqslant u_n$. Puisque $\ln(n) \geqslant 0$ et que f est croissante sur $[0,+\infty[$, on en déduit que $f(\ln(n)) \leqslant f(u_n)$ ou encore, d'après la question précédente, $\ln(n) + \dfrac{1}{n} \leqslant u_{n+1}$.
Mais d'après la question 2), $\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \dfrac{1}{n}$. On en déduit que $\ln(n+1) \leqslant u_{n+1}$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ \ln(n) \leqslant u_n.}$$

5) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

6) a) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Donc $k - 1 \geqslant 1$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$ et donc sur $[k-1,k]$. Pour tout réel x de $[k-1,k]$, on a $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{k}$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\, dx \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\, dx = \frac{1}{k}(k-(k-1)) = \frac{1}{k}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } k \geqslant 2,\ \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\, dx.}$$

b) Soit $n \geqslant 2$. D'après la relation de Chasles et l'inégalité admise par l'énoncé,

$$\begin{aligned} u_n &\leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} \\ &\leqslant 1 + \int_{1}^{2} \frac{1}{x}\, dx + \int_{2}^{3} \frac{1}{x}\, dx + \ldots + \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x}\, dx \\ &= 1 + \int_{1}^{n-1} \frac{1}{x}\, dx = 1 + [\ln(x)]_1^{n-1} = 1 + \ln(n-1) - \ln(1) = 1 + \ln(n-1). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \geqslant 2,\ u_n \leqslant 1 + \ln(n-1).}$$

7) Soit $n \geqslant 2$. Donc $\ln(n) > 0$. En divisant les différents membres de l'encadrement précédent par $\ln(n)$, on obtient

$$1 \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} + \frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} \quad (*).$$

Ensuite, $\dfrac{\ln(n-1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{1}{\ln(n)} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$. Donc, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$1 \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln(n)} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(n)} = 0$. Ensuite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{\ln(n)} + \dfrac{1}{\ln(n)} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1$. D'après le théorème des gendarmes et l'encadrement $(*)$, on peut affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1.}$$