BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

France métropolitaine

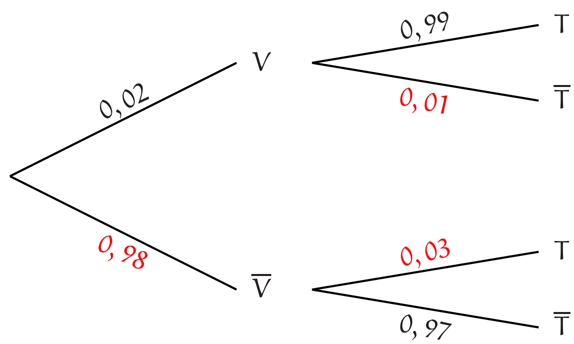
EXERCICE 1

PARTIE A

1) a) L'énoncé fournit directement

$$\boxed{p(V) = 0,02,\ p_V(T) = 0,99 \text{ et } p_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right) = 0,97.}$$

Représentons la situation par un arbre.



b) On en déduit que $p(V \cap T) = p(V) \times p_V(T) = 0,02 \times 0,99 = 0,0198$.

$$\boxed{p(V \cap T) = 0,0198.}$$

2) La probabilité demandée est $p(T)$. D'après la formule des probabilités totales, $p(T) = p(T \cap V) + p(T \cap \overline{V})$. D'après la question précédente, $p(V \cap T) = 0,0198$ et d'autre part

$$p(T \cap \overline{V}) = p(\overline{V}) \times p_{\overline{V}}(T) = (1 - p(V))(1 - p_{\overline{V}}(\overline{T})) = (1 - 0,02)(1 - 0,97) = 0,98 \times 0,03 = 0,0294,$$

et donc $p(T) = 0,0198 + 0,0294 = 0,0492$.

$$\boxed{p(T) = 0,0492.}$$

3) a) La probabilité demandée est $p_T(V)$. Or,

$$p_T(V) = \frac{p(V \cap T)}{p(T)} = \frac{0,0198}{0,0492} = 0,402\ldots$$

Donc $p_T(V) = 0,4$ à 10^{-2} près ou encore $p_T(V) = 40\%$ à 1% près ce qui justifie la phrase de l'énoncé.

b) La probabilité demandée est $p_{\overline{T}}(\overline{V})$. Or,

$$p_{\overline{T}}(\overline{V}) = \frac{p(\overline{V} \cap \overline{T})}{p(\overline{T})}.$$

Ensuite, d'après la question 2), $p(\overline{T}) = 1 - p(T) = 1 - 0,0492 = 0,9508$ et d'autre part

$$p(\overline{V} \cap \overline{T}) = p(\overline{V}) \times p_{\overline{V}}(\overline{T}) = 0,98 \times 0,97 = 0,9506$$

puis $p_{\overline{T}}(\overline{V}) = \dfrac{0,9506}{0,9508} = 0,9998$ arrondi à 10^{-4}.

$$\boxed{p_{\overline{T}}(\overline{V}) = 0,9998 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

PARTIE B

1) La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la personne est contaminée par le virus » avec une probabilité $p = 0,02$ ou « la personne n'est pas contaminée par le virus » avec une probabilité $1 - p = 0,98$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,02$.

2) La probabilité demandée est $p(X \geqslant 2)$. Or,

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 2) &= 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - \binom{10}{0} \times 0,02^0 \times 0,98^{10} - \binom{10}{0} \times 0,02^1 \times 0,98^9 \\ &= 1 - 0,98^{10} - 10 \times 0,02 \times 0,98^9 = 0,0162 \text{ arrondi à } 10^{-4}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La probabilité qu'au moins deux personnes soient contaminées est } 0,0162 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

EXERCICE 2

1. Réponse 2

2. Réponses 1 et 4

3. Réponse 2

4. Réponse 3

Explication 1.

$$z_E = z_A + e^{i\pi/3}(z_D - z_A) = 1 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-i-1) = 1 - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

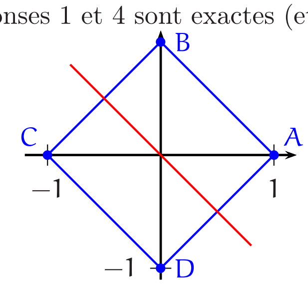
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i).$$

La bonne réponse est la deuxième.

Explication 2. (Erreur d'énoncé car deux des réponses sont exactes).
Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z.

$$|z+i| = |z-1| \Leftrightarrow |z - z_D| = |z - z_A| \Leftrightarrow MD = MA \Leftrightarrow M \in \text{med}[AD].$$

Donc l'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[AD]$. Malheureusement, la médiatrice du segment $[AD]$ est aussi la médiatrice du segment $[BC]$ et donc les réponses 1 et 4 sont exactes (et les réponses 2 et 3 sont fausses).



Explication 3. On note (E) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\dfrac{z+i}{z+1}$ soit un imaginaire pur.
Le point D est élément de (E) car $\dfrac{z_D+i}{z_D+1} = \dfrac{-i+i}{-i+1} = 0$ qui est bien un imaginaire pur. Le point C n'est pas un élément de (E) car $z_C + 1 = 0$ et donc $\dfrac{z_C+i}{z_C+1}$ n'existe pas.

Soit M un point du plan distinct de C et D dont l'affixe est notée z.

$$\begin{aligned} M \in (E) &\Leftrightarrow \frac{z+i}{z+1} \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \frac{z-z_D}{z-z_C} \text{ imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-z_D}{z-z_C}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{DM}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre } [CD] \text{ privé des points } C \text{ et } D. \end{aligned}$$

En récupérant le point D, on a montré que (E) est le cercle de diamètre $[CD]$ privé du point C. La bonne réponse est la réponse 2.

Explication 4. On note (E) l'ensemble considéré. Le point B d'affixe i n'appartient pas à (E) car 0 n'a pas d'argument.
Soit M un point du plan d'affixe $z \neq i$.

$$\begin{aligned} M \in (E) &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } \arg(z-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \text{les vecteurs } \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{BD} \text{ sont colinéaires et de même sens} \Leftrightarrow M \in]BD). \end{aligned}$$

Donc (E) est la demi-droite d'origine B passant par D et privée du point B. La bonne réponse est la troisième.

EXERCICE 3

PARTIE A

1) a) Pour tout réel x, $f_1(x) = xe^{-x}$.

Limite de f_1 en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$.

Limite de f_1 en $+\infty$. Pour tout réel non nul x, $f_1(x) = \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{e^x/x}$. D'après un théorème de croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0.}$$

b) La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_1'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1-x$. Par suite, la fonction f_1' est strictement positive sur $]-\infty, 1[$ et strictement négative sur $]1, +\infty[$ puis la fonction f_1 est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f_1 :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

c) La courbe $\mathscr{C}_1$ admet une tangente parallèle à (Ox) en son point d'abscisse 1. La tangente T_k n'est pas parallèle à (Ox). L'entier k n'est donc pas égal à 1 ou encore l'entier k est supérieur ou égal à 2.

2) a) Si un point M appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$, $n \geqslant 1$, alors M appartient aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et donc son abscisse x est solution de l'équation $f_1(x) = f_2(x)$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\Leftrightarrow xe^{-x} = x^2e^{-x} \Leftrightarrow xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x(1-x)e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow x(1-x) = 0 \text{ (car } e^{-x} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont exactement deux points communs, les points de coordonnées respectives $(0, 0)$ (car $f_1(0) = 0$) et $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$ (car $f_1(1) = \dfrac{1}{e}$). Les courbes $\mathscr{C}_n$, $n \geqslant 1$, ont donc au plus deux points en commun.

Réciproquement, pour tout entier naturel non nul n, $f_n(0) = 0^n e^{-0} = 0$ et donc le point $O(0, 0)$ appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$, $n \geqslant 1$.
De même, pour tout entier naturel non nul n, $f_n(1) = 1^n \times e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ et donc le point de coordonnées $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$ appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$, $n \geqslant 1$.

$$\boxed{\text{Les courbes } \mathscr{C}_n,\ n \geqslant 1, \text{ ont exactement deux points communs, les points de coordonnées } (0,0) \text{ et } \left(1, \frac{1}{e}\right).}$$

b) Soit $n \geqslant 2$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} + x^n(-1)e^{-x} = nx^{n-1}e^{-x} - x^ne^{-x} = x^{n-1}(n-x)e^{-x}.$$

3) En particulier, pour tout réel x, $f_3'(x) = x^2(3-x)e^{-x}$. Donc, la fonction f_3' est strictement positive sur $]-\infty, 0[\cup]0, 3[$ et strictement négative sur $]3, +\infty[$ puis la fonction f_3 est strictement croissante sur $]-\infty, 3]$ et strictement décroissante sur $[3, +\infty[$. La fonction f_3 admet donc un maximum atteint en $x = 3$.

4) a) Soit $k \geqslant 2$. Une équation de T_k est $y = f_k(1) + f_k'(1)(x-1)$ avec $f_k(1) = e^{-1}$ et $f_k'(1) = 1^{k-1}(k-1)e^{-1} = (k-1)e^{-1}$.

Une équation de T_k est donc $y = e^{-1} + (k-1)e^{-1}(x-1)$ ou encore $y = \dfrac{k-1}{e}x + \dfrac{2-k}{e}$. Ensuite,

$$\frac{k-1}{e}x + \frac{2-k}{e} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e}((k-1)x - (k-2)) = 0 \Leftrightarrow (k-1)x - (k-2) = 0 \Leftrightarrow (k-1)x = k-2 \Leftrightarrow x = \frac{k-2}{k-1}.$$

Donc la tangente T_k coupe l'axe des abscisses au point A_k de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1}, 0\right)$.

b) Soit $k \geqslant 2$.

$$A_k = A \Leftrightarrow \frac{k-2}{k-1} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5(k-2) = 4(k-1) \Leftrightarrow 5k - 4k = 10 - 4 \Leftrightarrow k = 6.$$

$$\boxed{k = 6.}$$

PARTIE B

1) On a $I_1 = \displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx$. Pour x dans $[0,1]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,1]$ et pour x dans $[0,1]$, on a

$$u(x) = x \qquad v(x) = -e^{-x}$$
$$u'(x) = 1 \qquad v'(x) = e^{-x}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 xe^{-x}\,dx = \left[x(-e^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 1(-e^{-x})\,dx \\ &= (-e^{-1}) - (0) + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + e^0 \\ &= 1 - 2e^{-1} = \frac{e-2}{e}. \end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = 1 - 2e^{-1} = \frac{e-2}{e}.}$$

2) a) Puisque chaque fonction f_n est continue et positive sur $[0,1]$, I_n est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C}_n)$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. D'après le graphique, il semblerait que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ soit décroissante.

b) Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\,dx - \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx = \int_0^1 (x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x})\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 x^n(x-1)e^{-x}\,dx \end{aligned}$$

Pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x^n \geqslant 0$, $x - 1 \leqslant 0$ et $e^{-x} \geqslant 0$. Donc pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x^n(x-1)e^{-x} \leqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 x^n(x-1)e^{-x}\,dx \leqslant 0$ ou encore que $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel non nul n, $I_{n+1} \leqslant I_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante.}}$$

c) D'autre part, chaque fonction f_n, $n \geqslant 1$, est positive sur $[0,1]$ et donc, par positivité de l'intégrale, pour tout entier naturel non nul n, on a $I_n \geqslant 0$.

En résumé, la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

d) Soit $n \geqslant 1$. Pour tout réel x de $[0,1]$, $0 \leqslant x^n e^{-x} \leqslant x^n \times 1$. Par positivité et croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$0 \leqslant \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx \leqslant \int_0^1 x^n\, dx$$

avec $\displaystyle\int_0^1 x^n\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

EXERCICE 4

Partie A - Restitution organisée de connaissances

1) Soient a, b et c trois entiers relatifs tels que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et a et b premiers entre eux. On suppose que a divise $b \times c$. Il existe donc un entier relatif k tel que $bc = ka$. Puisque a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$. On multiplie les deux membres de cette égalité par c et on obtient

$$c = acu + bcv = acu + kav = a(cu + kv).$$

Puisque $cu + kv$ est un entier relatif, l'égalité précédente montre que a divise c.

On a montré le théorème de Gauss : « si a, b et c sont trois entiers relatifs tels que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et a et b premiers entre eux et si a divise bc, alors a divise c ».

2) Le résultat est clair si $p = 0$ ou $q = 0$. On suppose que p et q sont deux entiers naturels non nuls.
Puisque $a \equiv 0$ [p], il existe un entier relatif k_1 tel que $a = k_1 p$. De même, puisque $a \equiv 0$ [q], il existe un entier relatif k_2 tel que $a = k_2 q$. Ainsi, $k_1 p = k_2 q$ et donc q divise $k_1 p$. Puisque q est premier à p, le théorème de Gauss permet d'affirmer que q divise k_1. Il existe donc un entier relatif k tel que $k_1 = kq$. Mais alors $a = k_1 p = kpq$ et donc, puisque k est un entier relatif, a divise pq ou encore $a \equiv 0$ [pq].

Partie B

1) a) Les entiers 5 et 17 sont deux nombres premiers distincts et en particulier sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que $17u + 5v = 1$.

On a $17 = 3 \times 5 + 2$ et $5 = 2 \times 2 + 1$ puis $1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2(17 - 3 \times 5) = 17 \times (-2) + 5 \times 7$. Donc le couple $(-2, 7)$ est un couple (u, v) tel que $17u + 5v = 1$.

b) Puisque $17u + 5v = 1$, on a $5v \equiv 1$ [17]. Comme d'autre part $3 \times 17u \equiv 0$ [17], on a $n_0 \equiv 0 + 9 \times 1$ [17] ou encore $n_0 \equiv 9$ [17].
De même, $n_0 \equiv 3 \times 1 + 0$ [5] ou encore $n_0 \equiv 3$ [5]. Donc

$$\boxed{n_0 \in \mathscr{S}.}$$

c) On peut prendre $n_0 = 3 \times 17 \times (-2) + 9 \times 5 \times 7 = -102 + 315 = 213$. On peut aussi prendre $n_0 = 43$ comme le suggère la question 2)b) car $43 = 2 \times 17 + 9 = 8 \times 5 + 3$ et donc $\left\{\begin{array}{l} 43 \equiv 9\ [17] \\ 43 \equiv 3\ [5] \end{array}\right.$.

2) a) Soit n un entier relatif. Puisque $\left\{\begin{array}{l} n_0 \equiv 9\ [17] \\ n_0 \equiv 3\ [5] \end{array}\right.$,

$$n \in \mathscr{S} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} n \equiv 9\ [17] \\ n \equiv 3\ [5] \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} n \equiv n_0\ [17] \\ n \equiv n_0\ [5] \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} n - n_0 \equiv 0\ [17] \\ n - n_0 \equiv 0\ [5] \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow n - n_0 \equiv 0\ [17 \times 5] \text{ (d'après la question A.2) et puisque 5 et 17 sont premiers entre eux)}$$
$$\Rightarrow n - n_0 \equiv 0\ [85]$$

b) Réciproquement, si $n - n_0 \equiv 0$ [85], $n - n_0$ est un multiple de $85 = 17 \times 5$ et en particulier, $n - n_0$ est un multiple de 17. Par suite, $n \equiv n_0$ [17] puis $n \equiv 9$ [17].
De même, $n - n_0$ est un multiple de 5 et donc $n \equiv 3$ [5]. Finalement $n \in \mathscr{S}$.

En résumé, en prenant par exemple $n_0 = 43$ (d'après la question 1)c))

$$n \in \mathscr{S} \Leftrightarrow n - 43 \equiv 0\ [85] \Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } n = 43 + 85k.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{43 + 85k,\ k \in \mathbb{Z}\}.}$$

3) Soit n le nombre de jetons de Zoé. n est un élément de $\mathscr{S}$. Donc, il existe un entier relatif k tel que $n = 43 + 85k$. De plus,

$$300 \leqslant n \leqslant 400 \Leftrightarrow 300 \leqslant 43 + 85k \leqslant 400 \Leftrightarrow 257 \leqslant 85k \leqslant 357 \Leftrightarrow \frac{257}{85} \leqslant k \leqslant \frac{357}{85}$$
$$\Leftrightarrow 3,02\ldots \leqslant k \leqslant 4,2 \Leftrightarrow k = 4 \text{ (car } k \text{ est un entier).}$$

Quand $k = 4$, on obtient $n = 43 + 85 \times 4 = 383$. Donc

$$\boxed{\text{Zoé possède 383 jetons.}}$$

