BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011

MATHEMATIQUES

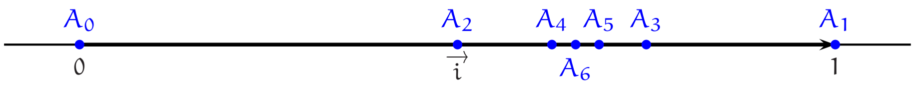
- Série S -

Enseignement de Spécialité

Centres étrangers

EXERCICE 1

1) a) Représentation graphique.



b) • $a_2 = \frac{1}{2}(a_0 + a_1) = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$.

• $a_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

• $a_4 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{8}$.

• $a_5 = \frac{1}{2}(a_3 + a_4) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{8}\right) = \frac{11}{16}$.

• $a_6 = \frac{1}{2}(a_4 + a_5) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8} + \frac{11}{16}\right) = \frac{21}{32}$.

c) Si A et B sont deux points d'affixes respectives a et b, l'affixe du milieu du segment $[AB]$ est $\frac{a+b}{2}$. Donc, pour tout entier naturel naturel n, $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$.

• $-\frac{1}{2}a_0 + 1 = 1 = a_1$ et donc l'égalité est vraie quand $n = 0$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$. Alors $-\frac{1}{2}a_n = a_{n+1} - 1$ puis $a_n = -2a_{n+1} + 2$. Par suite,

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{2}(-2a_{n+1} + 2 + a_{n+1}) = \frac{1}{2}(-a_{n+1} + 2) = -\frac{1}{2}a_{n+1} + 1.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1.}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}a_n + 1 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}v_n.$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } -\frac{1}{2}.}$$

4) Puisque $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$. Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3} + v_n\right) = \frac{2}{3}$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{2}{3}.}$$

EXERCICE 2

1. FAUX

2. FAUX

3. FAUX

4. VRAI

4. VRAI

Justification 1.

Le couple $(9, -1)$ est solution de (E) car $2\times 9+11\times(-1) = 18-11 = 7$. S'il existe un entier relatif k tel que $(22k-2, -4k+1) = (9, -1)$, on a nécessairement $22k-2 = 9$ puis $k = \dfrac{1}{2}$. Comme $\dfrac{1}{2}$ n'est pas un entier relatif, il n'existe pas d'entier relatif k tel que $(22k-2, -4k+1) = (9, -1)$ et pourtant $(9, -1)$ est bien une solution de l'équation (E). Donc, la proposition 1 est fausse.

Justification 2. Les entiers 7 et 11 sont des nombres premiers distincts et en particulier, 11 est premier à 7. D'après le petit théorème de FERMAT, $11^6 \equiv 1 \pmod 7$ et plus généralement, pour tout entier naturel k, $11^{6k} \equiv 1 \pmod 7$.
Comme $2012 = 6\times 335+2$, on a $11^{2012} = 11^{6\times 335}\times 11^2$ et donc $11^{2012} \equiv 1\times 11^2 \pmod 7$ ou encore $11^{2012} \equiv 4^2 \pmod 7$ ou encore $11^{2012} \equiv 16 \pmod 7$ ou enfin $11^{2012} \equiv 2 \pmod 7$. La proposition 2 est fausse.

Justification 3. L'expression complexe de la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est

$$z' = a + \sqrt{2}e^{-i\pi/2}(z-a) = 1+i-i\sqrt{2}(z-1-i),$$

et donc

$$z'_B = 1+i-i\sqrt{2}(3i-1-i) = 1+i-i\sqrt{2}(-1+2i) = 1+i+i\sqrt{2}+2\sqrt{2} = \left(1+2\sqrt{2}\right)+i\left(1+\sqrt{2}\right) \neq z_C.$$

Donc la proposition 3 est fausse.

Justification 4. L'expression complexe de f est du type $z' = \alpha\overline{z}+\beta$ où α et β sont deux nombres complexes. Donc f est une similitude plane indirecte. De plus

$$|\alpha| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}} = 1.$$

Donc f est une isométrie plane indirecte. Ensuite,

$$z'_A = \left(-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)(1-i)+\left(\frac{12}{5}+\frac{6}{5}i\right) = -\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i+\frac{3}{5}i-\frac{4}{5}+\frac{12}{5}+\frac{6}{5}i = 1+i = z_A$$

et donc $f(A) = A$ puis

$$z'_B = \left(-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)(2+i)+\left(\frac{12}{5}+\frac{6}{5}i\right) = -\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i-\frac{3}{5}i+\frac{4}{5}+\frac{12}{5}+\frac{6}{5}i = 2-i = z_B$$

et donc $f(B) = B$. Ainsi, f est une isométrie indirecte qui admet les deux points distincts A et B pour points invariants. On sait alors que f est la réflexion d'axe (AB) et donc la proposition 4 est vraie.

Justification 5. Le plan d'équation $z = 0$ est le plan (Oxy). Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (\mathscr{S})\cap(Oxy) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=0 \\ 4xy=z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=0 \\ 4xy=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=0 \\ x=0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} z=0 \\ y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow M \in (Oy) \text{ ou } M \in (Ox).$$

Donc l'intersection de $(\mathscr{S})$ et du plan d'équation $z = 0$ est la réunion des droites (Ox) et (Oy) qui est bien la réunion de deux droites orthogonales. La proposition 5 est vraie.

EXERCICE 3

1) a) Dans le repère, $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, on a $C(1,1,0)$, $E(0,0,1)$, $I\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ et $J\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$.

b) Le point M est un point du segment $[CE]$. Donc il existe un réel t tel que $M = \text{bar}\{C(1-t), E(t)\}$ puis

- $x_M = \dfrac{(1-t)x_C + tx_E}{t+(1-t)} = (1-t)\times 1 + t\times 0 = 1-t$,
- $y_M = \dfrac{(1-t)y_C + ty_E}{t+(1-t)} = (1-t)\times 1 + t\times 0 = 1-t$,
- $z_M = \dfrac{(1-t)z_C + tz_E}{t+(1-t)} = (1-t)\times 0 + t\times 1 = t$.

En résumé,

$$\boxed{\text{il existe un réel } t \in [0,1] \text{ tel que les coordonnées de } M \text{ soient } (1-t, 1-t, t).}$$

2) a) On rappelle que $C(1,1,0)$, $E(0,0,1)$, $I\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ et $J\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$.

- $CI = \sqrt{(x_I - x_C)^2 + (y_I - y_C)^2 + (z_I - z_C)^2} = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (0-0)^2} = \frac{1}{2}$.
- $CJ = \sqrt{(x_J - x_C)^2 + (y_J - y_C)^2 + (z_J - z_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (1-1)^2 + (0-0)^2} = \frac{1}{2}$.

Donc $CI = CJ$ et C appartient au plan médiateur du segment $[IJ]$.

De même,

- $EI = \sqrt{(x_I - x_E)^2 + (y_I - y_E)^2 + (z_I - z_E)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.
- $EJ = \sqrt{(x_J - x_E)^2 + (y_J - y_C)^2 + (z_J - z_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + (1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

Donc $EI = EJ$ et E appartient au plan médiateur du segment $[IJ]$.

b) Puisque les points C et E sont dans le plan médiateur, le segment $[CE]$ tout entier est contenu dans ce plan et en particulier le point M est dans le plan médiateur du segment $[IJ]$ ce qui signifie que $MI = MJ$ ou encore

$$\boxed{\text{le triangle } MIJ \text{ est isocèle en } M.}$$

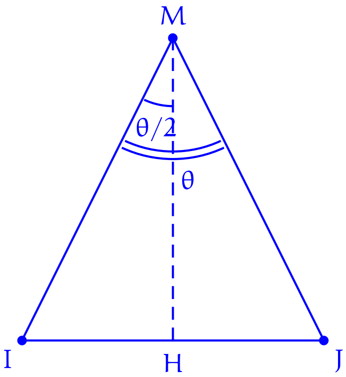
c)

$$\begin{aligned}IM^2 &= (x_M - x_I)^2 + (y_M - y_I)^2 + (z_M - z_I)^2 = \left(1 - t - \frac{1}{2}\right)^2 + (1-t-1)^2 + (t-0)^2 = 2t^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \\ &= 2t^2 + t^2 - t + \frac{1}{4} = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t \text{ de } [0,1],\ IM^2 = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.}$$

3) a) θ est maximal si et seulement si $\frac{\theta}{2}$ est maximal. Puisque $\theta \in [0, \pi]$, $\frac{\theta}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Maintenant, la fonction sinus est croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\frac{\theta}{2}$ est maximal si et seulement si $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal. En résumé, θ est maximal si et seulement si $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

b) Notons H le milieu du segment [IJ]. Puisque le triangle MIJ est isocèle en M d'après la question 2)b), la droite (MH) est aussi la hauteur issue de M du triangle MIJ. Ainsi, le triangle MHI est rectangle en H.



Dans ce triangle, on a

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\widehat{IMH}\right) = \frac{IH}{IM} = \frac{IJ}{2\ IM} = \frac{\sqrt{2}IC}{2\ IM} = \frac{\sqrt{2}}{4\ IM} = \frac{1}{2\sqrt{2}\ IM}.$$

Quand IM est minimal, $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}\ IM}$ est maximal et quand $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal, $IM = \frac{1}{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ est minimal.

En résumé,

$$\boxed{\text{L'angle } \widehat{IMJ} \text{ est maximal si et seulement si la distance } IM \text{ est minimale.}}$$

c) La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$f'(t) = 6t - 1.$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{6}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{6}, 1\right]$.

d) D'après la question 2)c), $f(t) = IM^2$. D'après la question précédente, $f(t)$ est minimal si et seulement si $t = \frac{1}{6}$ ce qui correspond à une unique position M_0 du point M sur le segment [CE].

$$\boxed{\text{Il existe une unique position } M_0 \text{ du point } M \text{ sur le segment [CE] tel que } \widehat{IMJ} \text{ soit maximal.}}$$

e) Le point M_0 a pour coordonnées $\left(1 - \frac{1}{6}, 1 - \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ ou encore $\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$. Par suite,

$$\overrightarrow{IM_0}.\overrightarrow{EC} = \left(\frac{5}{6} - 1\right)(1 - 0) + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right)(1 - 0) + \left(\frac{1}{6} - 0\right)(0 - 1) = -\frac{1}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = 0.$$

Donc le point M_0 appartient au segment [EC] et la droite (IM_0) est perpendiculaire au segment [EC] ou encore

$$\boxed{\text{le point } M_0 \text{ est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].}}$$

EXERCICE 4

1) Etude des fonctions f et g

a) Limite de f en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{1-x} = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

Limite de g en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{1-x} = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.}$$

b) Limite de f en $+\infty$. Pour tout réel non nul x, $f(x) = x \times e \times \dfrac{1}{e^x} = e \times \dfrac{1}{e^x/x}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e \times \dfrac{1}{e^x/x} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

Limite de g en $+\infty$. Pour tout réel non nul x, $g(x) = x^2 \times e \times \dfrac{1}{e^x} = e \times \dfrac{1}{e^x/x^2}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x^2} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e \times \dfrac{1}{e^x/x^2} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$$

c) Variations de f. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{1-x} + x \times (-1) \times e^x = (1-x)e^{1-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{1-x} > 0$ et donc, pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1-x$. On en déduit le tableau de variations de le fonction f ($f(1) = 1 \times e^0 = 1$).

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Variations de g. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = 2x \times e^{1-x} + x^2 \times (-1) \times e^x = (2x - x^2)e^{1-x} = x(2-x).$$

Pour tout réel x, $e^{1-x} > 0$ et donc, pour tout réel x, $g'(x)$ est du signe de $x(2-x)$. On en déduit le tableau de variations de le fonction g.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2) Calcul d'intégrales

a) La fonction $x \mapsto e^{1-x}$ est continue sur le segment $[0,1]$. Donc I_0 existe.

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\, dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = (-e^{1-1}) - (-e^{1-0}) = e - 1.$$

$$\boxed{I_0 = e - 1.}$$

b) Soit n un entier naturel. Pour x dans $[0,1]$, posons $u(x) = x^{n+1}$ et $v(x) = -e^{1-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,1]$ et pour x dans $[0,1]$ on a

$$\begin{array}{cc} u(x) = x^{n+1} & v(x) = -e^{1-x} \\ u'(x) = (n+1)x^n & v'(x) = e^{1-x} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}\,dx = \left[x^{n+1}(-e^{1-x})\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n(-e^{1-x})\,dx \\ &= (1^{n+1}(-e^{1-1}) - (0^{n+1}e^{1-0}) + (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= -1 + (n+1)I_n. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n.}$$

c) $I_1 = -1 + I_0 = -1 + (e-1) = e-2$ et $I_2 = -1 + 2I_1 = -1 + 2(e-2) = 2e-5$.

$$\boxed{I_1 = e-2 \text{ et } I_2 = 2e-5.}$$

3) Calcul d'une aire plane

a) La position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ est donnée par le signe de $f(x) - g(x)$ suivant les valeurs de x. Soit x un réel.

$$f(x) - g(x) = xe^{1-x} - x^2e^{1-x} = x(1-x)e^{1-x}.$$

Le signe de $f(x) - g(x)$ est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de $\mathscr{C}'$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]1,+\infty[$, strictement au-dessus de $\mathscr{C}'$ sur $]0,1[$ et $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent aux points de coordonnées $(0,0)$ et $(1,1)$.

b) D'après la question précédente, $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{C}'$ sur $[0,1]$. Donc, d'après la question 2)c),

$$\mathscr{A} = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx = I_1 - I_2 = (e-2) - (2e-5) = 3-e.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 3-e.}$$

4) Etude de l'égalité de deux aires

a) Soit $a > 1$.

$$\begin{aligned} S(a) = \mathscr{A} &\Leftrightarrow 3 - e^{1-a}(a^2+a+1) = 3-e \Leftrightarrow e \times \frac{1}{e^a}(a^2+a+1) = e \Leftrightarrow \frac{1}{e^a}(a^2+a+1) = 1 \\ &\Leftrightarrow a^2+a+1 = e^a \text{ (car } e^a \neq 0). \end{aligned}$$

b) Pour $a \geqslant 1$, posons $h(a) = e^a - a^2 - a - 1$ de sorte que $S(a) = \mathscr{A} \Leftrightarrow h(a) = 0$.
La fonction h est dérivable sur $[1,+\infty[$ et pour $a \geqslant 1$, $h'(a) = e^a - 2a - 1$. De même, la fonction h' est dérivable sur $[1,+\infty[$ et pour $a \geqslant 1$, $h''(a) = e^a - 2$.
Pour $a > 1$, $h''(a) > e^1 - 2 > 0$. Donc la fonction h' est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

Puisque la fonction h' est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$, on sait que pour tout réel k de $\left[h'(1), \lim\limits_{a\to+\infty} h'(a)\right[$, l'équation $h'(a) = k$ admet une solution et une seule dans $[1,+\infty[$.

En particulier, puisque $\lim\limits_{a\to+\infty} e^a - 2a - 1 = \lim\limits_{a\to+\infty} e^a\left(1 - 2\frac{a}{e^a} - \frac{1}{e^a}\right) = +\infty > 0$ et d'autre part $h'(1) = e - 2 - 1 = e - 3 < 0$, il existe un unique réel α de $[1,+\infty[$ et même $]1,+\infty[$ tel que $h'(\alpha) = 0$. Puisque la fonction h' est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, on en déduit que la fonction h' est strictement négative sur $[1,\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha,+\infty[$ puis que la fonction h est strictement décroissante sur $[1,\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha,+\infty[$.

Puisque $h(1) = e - 3 < 0$ et que h est strictement décroissante sur $[1, \alpha]$, pour tout réel a de $[1, \alpha]$, on a $h(a) < 0$. En particulier, pour tout réel a de $[1, \alpha]$, on a $h(a) \neq 0$ et d'autre part, $h(\alpha) < 0$.
Ensuite, la fonction h est continue et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

On en déduit que pour tout réel k de $\left[h(1), \lim\limits_{a \to +\infty} h(a)\right[$, l'équation $h(a) = k$ admet une unique solution dans $[\alpha, +\infty[$. En particulier, puisque $\lim\limits_{a \to +\infty} h(a) = \lim\limits_{a \to +\infty} e^a \left(1 - \dfrac{a^2}{e^a} - \dfrac{a}{e^a} - \dfrac{1}{e^a}\right) = +\infty > 0$ et que $h(1) = e - 3 < 0$, l'équation $h(a) = 0$ admet une unique solution dans $[\alpha, +\infty[$.

En résumé, l'équation $h(a) = 0$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$ ou encore l'équation $S(a) = \mathscr{A}$ admet une unique solution a_0 dans $[1, +\infty[$. On peut montrer que $1,79 < a_0 < 1,80$.