BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Asie

EXERCICE 1

1) Etude d'une fonction f.

a) Limite de f en 0. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} \times \ln x = -\infty$.

Limite de f en $+\infty$. D'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

b) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.}$$

c) Pour tout $x > 0$, on a $x^2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$ sur $]0, +\infty[$.
Or, pour $x > 0$, $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e^1 \Leftrightarrow x < e$ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$) et de même $1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

2) Etude d'une fonction g.

a) Limite de g en 0. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)^2 = \lim_{X\to-\infty} X^2 = +\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} \times (\ln x)^2 = +\infty$.

Limite de g en $+\infty$. Soit $x > 0$.

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{2\ln(x^{1/2})}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0.$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.}$$

b) g est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x \times x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{(\ln x)(2 - \ln x)}{x^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ g'(x) = \frac{(\ln x)(2 - \ln x)}{x^2}.}$$

c) Pour tout $x > 0$, on a $x^2 > 0$ et donc $g'(x)$ est du signe de $(\ln x)(2 - \ln x)$ sur $]0, +\infty[$.
Le signe de $\ln x$ est connu et d'autre part, comme à la question 1)a), pour $x > 0$, $2 - \ln x > 0 \Leftrightarrow x < e^2$ et $2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^2$. On en déduit le signe de $(\ln x)(2 - \ln x)$ suivant les valeurs de x :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$2 - \ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$(\ln x)(2 - \ln x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations de g :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
g	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4/e^2$	$\searrow$	0

3) a) Les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$. Soit x un réel strictement positif.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{(\ln x)^2}{x} \Leftrightarrow \ln x = (\ln x)^2 \ \left(\text{car } \frac{1}{x} \neq 0\right) \\ &\Leftrightarrow (\ln x)^2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow (\ln x)(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = e. \end{aligned}$$

Comme $f(1) = 0$ et $f(e) = \dfrac{1}{e}$, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont exactement deux points communs à savoir les points de coordonnées $(1, 0)$ et $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$.

b) La position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est donnée par le signe de $g(x) - f(x)$. Or pour $x > 0$,

$$g(x) - f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{\ln x}{x} = \frac{(\ln x)(\ln x - 1)}{x}.$$

Sur $]0, +\infty[$, $g(x) - f(x)$ est du signe de $(\ln x)(\ln x - 1)$ qui est donné dans le tableau suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$(\ln x)(\ln x - 1)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

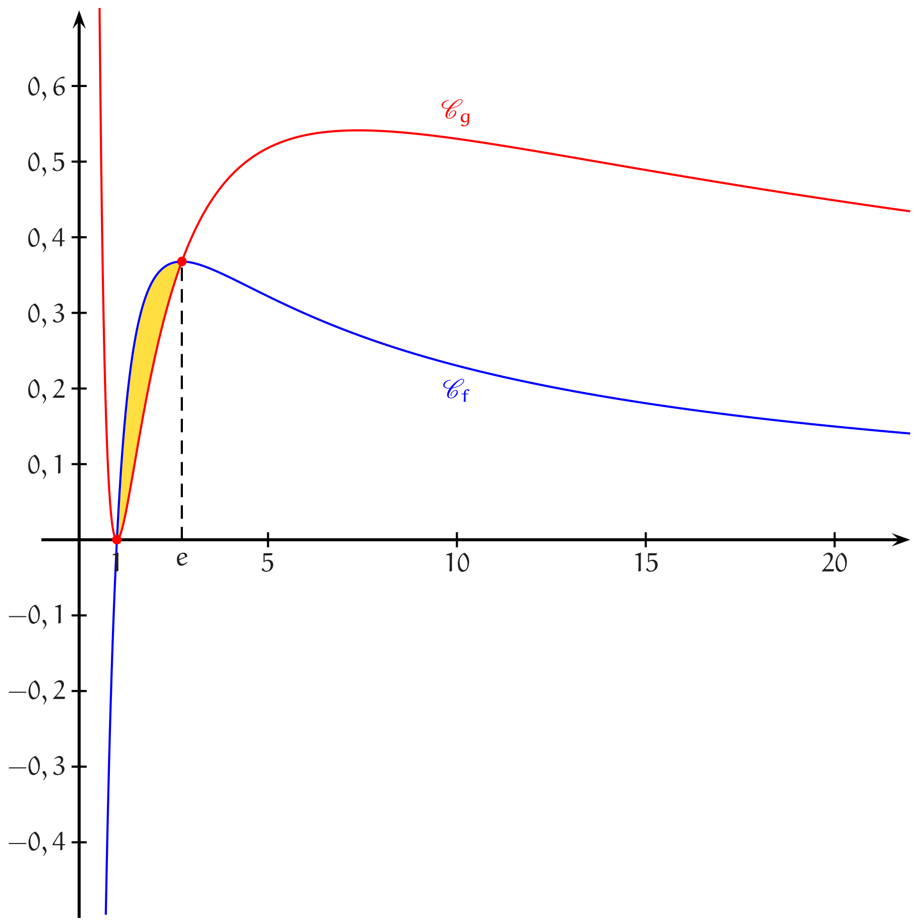
On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]0, 1[$ et sur $]e, +\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]1, e[$ et on retrouve le fait que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en leurs points d'abscisses 1 et e.

c) Voir graphique page suivante.

4) Les fonction f et g sont continues sur $[1, e]$ et de plus, pour tout réel x de $[1, e]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$. Donc

$$\mathscr{A} = \int_1^e f(x) - \int_1^e g(x)\ dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln x\ dx - \int_1^e \frac{1}{x} \times (\ln x)^2\ dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e - \left[\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_1^e$$
$$= \left(\frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2}\right) - \left(\frac{(\ln e)^3}{3} - \frac{(\ln 1)^3}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{1}{6} \text{ unité d'aire.}}$$



EXERCICE 2

1) L'expression complexe de r est $z' = a + e^{i\pi/2}(z - a) = -2 + i(z + 2) = iz - 2 + 2i$. Donc, puisque $J = r(B)$, en notant j l'affixe du point J, on a

$$j = i(5i) - 2 + 2i = -5 - 2 + 2i = -7 + 2i.$$

$$\boxed{\text{L'affixe du point J est } -7 + 2i.}$$

2) Le point B a pour coordonnées $(0, 5)$ et le point K a pour coordonnées $(-2, -6)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{BK}$ a pour coordonnées $(-2, -11)$.

De même, le point J a pour coordonnées $(-7, 2)$ et le point C a pour coordonnées $(4, 0)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{JC}$ a pour coordonnées $(11, -2)$. Par suite,

$$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{JC} = (-2) \times 11 + (-11) \times (-2) = 0,$$

et donc les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{JC}$ sont orthogonaux ou encore les droites (BK) et (JC) sont perpendiculaires.

$BK = \left\|\overrightarrow{BK}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-11)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ et $JC = \left\|\overrightarrow{JC}\right\| = \sqrt{11^2 + (-2)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$. Donc $BK = JC = 5\sqrt{5}$.

3) a) S est le milieu du segment [BJ] et donc

$$s = \frac{b + j}{2} = \frac{5i - 7 + 2i}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2}i.$$

De même, T est le milieu du segment [KC] et donc (en notant k l'affixe du point K)

$$t = \frac{k + c}{2} = \frac{-2 - 6i + 4}{2} = 1 - 3i.$$

$$\boxed{\text{L'affixe du point S est } -\frac{7}{2} + \frac{7}{2}i \text{ et l'affixe du point T est } 1 - 3i.}$$

b) C est l'image de B par la rotation de centre U et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donc $c = u + e^{i\pi/2}(b - u) = u + i(b - u) = (1 - i)u + ib$ puis

$$u = \frac{c - ib}{1 - i} = \frac{4 - i(5i)}{1 - i} = \frac{9(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{9 + 9i}{1^2 + (-1)^2} = \frac{9}{2} + \frac{9}{2}i.$$

$$\boxed{\text{L'affixe du point U est } \frac{9}{2} + \frac{9}{2}i.}$$

c) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AU}$ sont $\left(\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ST}$ sont $\left(\frac{9}{2}, -\frac{13}{2}\right)$. Donc,

$$\overrightarrow{AU}.\overrightarrow{ST} = \left(\frac{13}{2}\right) \times \frac{9}{2} + \frac{9}{2} \times \left(-\frac{13}{2}\right) = 0,$$

et donc les vecteurs $\overrightarrow{AU}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont orthogonaux ou encore la droite (AU) est la hauteur issue de U du triangle STU.

4) On sait que $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}\right) = \arg\left(\frac{u - a}{c - j}\right)$ $[2\pi]$. Or

$$\frac{u - a}{c - j} = \frac{\frac{9}{2} + \frac{9}{2}i - (-2)}{4 - (-7 + 2i)} = \frac{\frac{13}{2} + \frac{9}{2}i}{11 - 2i} = \frac{1}{2} \times \frac{(13 + 9i)(11 + 2i)}{(11 - 2i)(11 + 2i)} = \frac{1}{2} \times \frac{143 + 26i + 99i - 18}{11^2 + (-2)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{125 + 125i}{125} = \frac{1}{2}(1 + i).$$

Par suite,

$$\frac{u - a}{c - j} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}.$$

On en déduit que $\arg\left(\frac{u - a}{c - j}\right) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ ou encore

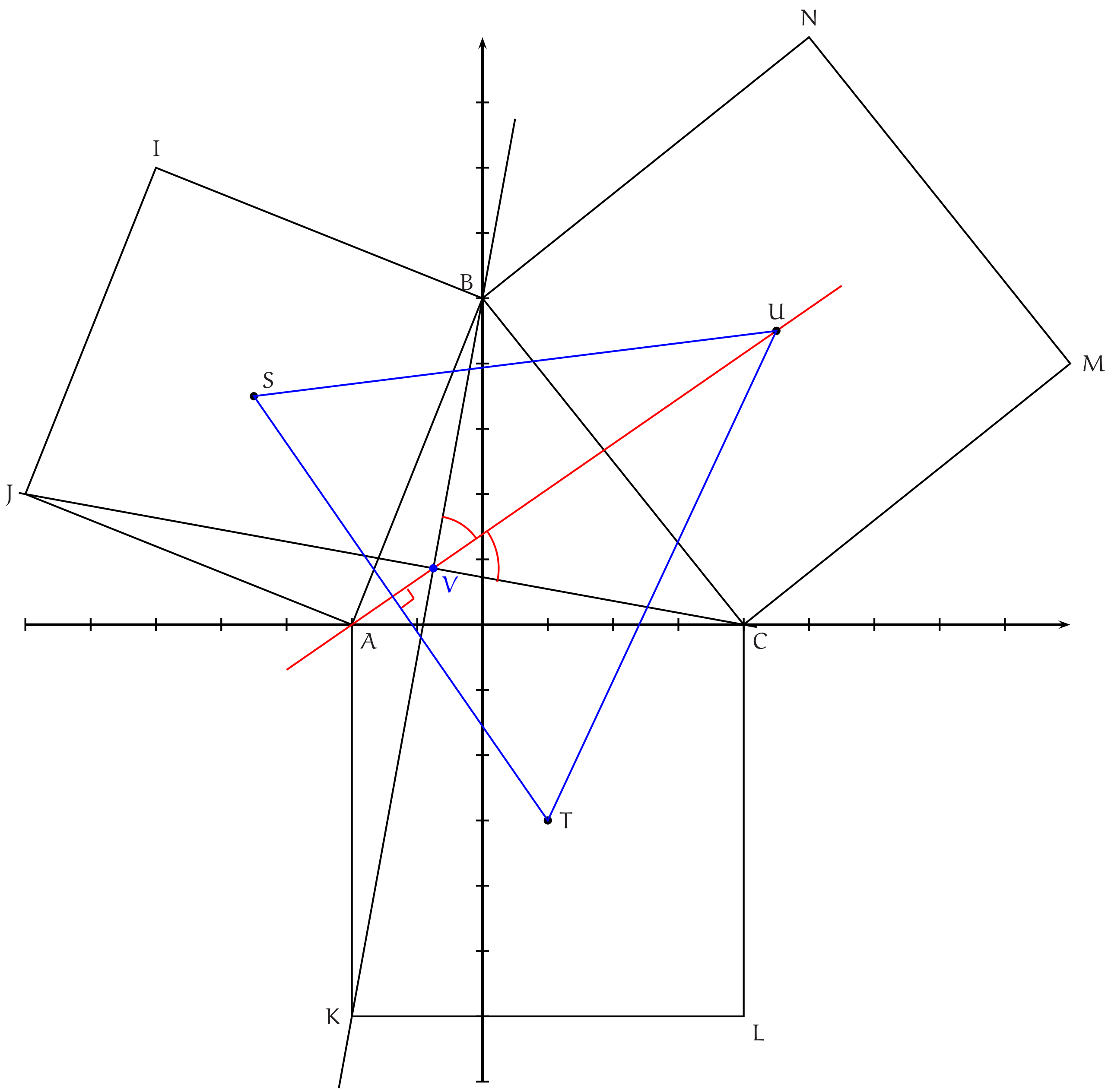
$$\boxed{\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}\right) = \frac{\pi}{4} \ [2\pi].}$$

5) a) Le vecteur $\overrightarrow{AV}$ a pour coordonnées $(1,248; 0,864)$ et le vecteur $\overrightarrow{AU}$ a pour coordonnées $(6,5; 4; 5)$.
Or $\dfrac{6,5}{1,248} \times 1,248 = 6,5$ et $\dfrac{6,5}{1,248} \times 0,864 = 4,5$ et donc $\dfrac{6,5}{1,248}\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{AU}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AU}$ et $\overrightarrow{AV}$ sont colinéaires ou encore que

$$\boxed{\text{les points } A, V \text{ et } U \text{ sont alignés.}}$$

b) D'après la question 4), $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}\right) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$. Comme le point V appartient aux segments $[JC]$ et $[AU]$, on a aussi $\left(\overrightarrow{VC}, \overrightarrow{VU}\right) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ puis $\widehat{CVU} = 45°$.
D'après la question 2), les segments $[BK]$ et $[JC]$ sont perpendiculaires. Il en est de même des segments $[VC]$ et $[VB]$. Puisque le point B est de l'autre côté de C par rapport à la droite (VU), on a $\widehat{UVB} = \widehat{CVB} - \widehat{CVU} = 90 - 45 = 45°$.
Ainsi, la droite (VU) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BVC}$ et, puisque les points A, V et U sont alignés,

$$\boxed{\text{la droite } (AU) \text{ est la bissectrice de l'angle } \widehat{BVC}.}$$



EXERCICE 3

1) a) Dans le repère $\left(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$, le point C a pour coordonnées $(0, 1, 0)$ et le point E a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CE}$ sont donc $(1, -1, 1)$.

La droite (EC) est la droite passant par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{CE}$. Une représentation paramétrique de la droite (EC) est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

b) Le vecteur $\overrightarrow{AF}$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées $(-1, 0, 1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points A, F et H définissent un unique plan.

Déterminons un vecteur normal au plan (AFH). Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur de coordonnées (a, b, c) où a, b et c sont trois réels. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (AFH) si et seulement si $\overrightarrow{n}$ n'est pas nul et $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AFH) comme par exemple les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AF} = 0 \\ \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AH} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b + c = 0 \\ -a + c = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = c \\ b = -c \end{array}\right..$$

Donc un vecteur normal au plan (AFH) est par exemple le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1, -1, 1)$. Ainsi, le plan (AFH) est le plan passant par le point A de coordonnées $(1, 0, 0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1, -1, 1)$. Une équation de ce plan est $1 \times (x - 1) - 1 \times (y - 0) + 1 \times (z - 0) = 0$ ou encore $x - y + z = 1$.

$$\boxed{\text{Une équation du plan } (AFH) \text{ est } x - y + z = 1.}$$

c) Soit $M(t, 1 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (EC).

$$M \in (AFH) \Leftrightarrow t - (1 - t) + t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}.$$

Quand $t = \dfrac{2}{3}$, on obtient le point I de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

$$\boxed{\text{Le point I a pour coordonnées } \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).}$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IE}$ sont $\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ et donc $\overrightarrow{IE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{n}$. On en déduit que la droite (IE) est perpendiculaire au plan (AFH). Puisque d'autre part, le point I appartient au plan (AFH), on a montré que

$$\boxed{\text{le point I est le projeté orthogonal du point } E \text{ sur le plan } (AFH).}$$

d) La distance d du point E au plan (AFH) est

$$d = \frac{|x_E - y_E + z_E - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|1 - 0 + 1 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

e) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IH}$ sont $\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AF}$ sont $(0, 1, 1)$. Donc

$$\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AF} = \left(-\frac{2}{3}\right) \times 0 + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 = 0.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux ou encore, puisque les droites (HI) et (AF) sont coplanaires (d'après la question c)), la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF).

De même, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HF}$ sont $(1, 1, 0)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AI}$ sont $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$. Donc

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{HF} = \left(-\frac{1}{3}\right) \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 0 = 0.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont orthogonaux ou encore la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (HF).

Ainsi, le point I appartient à deux des trois hauteurs du triangle AFH et donc

$$\boxed{\text{le point I est l'orthocentre du triangle } AFH.}$$

2) Les trois faces AEF, AEH et FEH ont une aire égale à $\frac{1}{2}$. Calculons l'aire de la face AFH.

Le volume du tétraèdre $EAFH$ est $V = \frac{1}{3} \times EF \times \text{aire de } AEH = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Mais, d'après la question 1)d), on a aussi $V = \frac{1}{3} \times d \times \text{aire de } AFH = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \text{aire de } AFH = \frac{\sqrt{3}}{9} \times \text{aire de } AFH$. Donc $\frac{\sqrt{3}}{9} \times \text{aire de } AFH = \frac{1}{6}$ puis

$$\text{aire de } AFH = \frac{1/6}{\sqrt{3}/9} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'aire de la face AFH n'est donc pas égale à l'aire de la face AEH et le tétraèdre $EAFH$ n'est ni de type 1, ni de type 3.

Ensuite, la droite (AE) est perpendiculaire au plan (FEH) et est donc orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, l'arête $[AE]$ est orthogonale à l'arête $[HF]$.
De même, la droite (EH) est perpendiculaire au plan (AEF) et donc l'arête $[EH]$ est orthogonale à l'arête $[AF]$.
Enfin, la droite (EF) est perpendiculaire au plan (AEH) et donc l'arête $[EF]$ est orthogonale à l'arête $[AH]$.
En résumé, les arêtes opposées du tétraèdre $EAFH$ sont deux à deux orthogonales et donc

$$\boxed{\text{le tétraèdre } EAFH \text{ est de type 2.}}$$

EXERCICE 4

Partie A - Restitution organisée de connaissances

1) Montrons par récurrence que tout entier $n \geqslant 2$ est soit premier, soit peut se décomposer en produit de facteurs premiers.

• L'entier 2 est premier et donc le résultat est vrai quand $n = 2$.
• Soit $n \geqslant 2$. Supposons que pour chaque entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$ ou bien k est premier ou bien k peut se décomposer en produit de facteurs premiers.
Si $n+1$ est premier, c'est fini. Sinon, l'entier $n+1$ peut s'écrire $n+1 = ab$ avec a et b entiers tels que $2 \leqslant a \leqslant n$ et $2 \leqslant b \leqslant n$. Par hypothèse de récurrence les entiers a et b sont soit premiers, soit produit de facteurs premiers. Il en est alors de même de $n+1 = ab$.

On a montré par récurrence que tout entier $n \geqslant 2$, soit est premier, soit peut se décomposer en produit de facteurs premiers.

2) $629 = 17 \times 37$.

Partie B

1) C est le cylindre de révolution d'axe (Oy) et de rayon 1.

2) a) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in C \cap \Gamma \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = xy \\ x^2 + z^2 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = xy \\ x^2 + x^2y^2 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = xy \\ x^2(1 + y^2) = 1 \end{array} \right. .$$

b) Soit $M(x, y, z)$ un point de $C \cap \Gamma$. Donc, $x^2(1 + y^2) = 1$. Supposons que x, y et z soient des entiers relatifs.
Si $x^2 \neq 1$, alors ou bien $x^2 = 0$ et dans ce cas $x^2(1 + y^2) \neq 1$, ou bien $x^2 \geqslant 4$ et dans ce cas $x^2(1 + y^2) \geqslant 4 > 1$ et en particulier $x^2(1 + y^2) \neq 1$. Donc nécessairement $x^2 = 1$ puis $1 + y^2 = 1$ ou encore, nécessairement, $(x, y) = (1, 0)$ ou $(x, y) = (-1, 0)$ puis $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ ou $(x, y, z) = (-1, 0, 0)$.

Réciproquement, les points $A(1, 0, 0)$ et $B(-1, 0, 0)$ sont à coordonnées entières et appartiennent effectivement à C et Γ. Donc Γ et C ont exactement deux points d'intersection dont les coordonnées sont des entiers relatifs à savoir les points $A(1, 0, 0)$ et $B(-1, 0, 0)$.

3) a) P_1 est le plan d'équation $z = 5$. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace tel que x, y et z soient des entiers relatifs.

$$M \in \Gamma \cap P_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = xy \\ z = 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 5 \\ xy = 5 \end{array} \right. .$$

Puisque x et y sont des entiers relatifs et que 5 est un nombre premier, $xy = 5 \Leftrightarrow (x, y) \in \{(1, 5), (-1, -5), (5, 1), (-5, -1)\}$.
Les points d'intersection de Γ et P_1 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs sont donc les points de coordonnées respectives $(1, 5, 5)$, $(-1, -5, 5)$, $(5, 1, 5)$ et $(-5, -1, 5)$.

b) $(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = n^4 + 4$.

c) Soit $n \geqslant 2$. $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 \geqslant (2-1)^2 + 1 = 2$ et $n^2 + 2n + 2 = (n+1)^2 + 1 \geqslant (2+1)^2 + 1 \geqslant 2$. Donc $a = n^2 - 2n + 2$ et $b = n^2 + 2n + 2$ sont deux entiers naturels non nuls distincts de 1 tels que $ab = n^4 + 4$. On en déduit que $n^4 + 4$ n'est pas premier.

d) Soit $n \geqslant 2$. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace tel que x, y et z soient des entiers relatifs.

$$M \in \gamma \cap P_n \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = xy \\ z = n^4 + 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = n^4 + 4 \\ xy = n^4 + 4 \end{array} \right. .$$

Puisque $n \geqslant 2$, $2 \leqslant n^2 - 2n + 2 < n^2 + 2n + 2$. Donc, les huit points de coordonnées respectives $(n^4 + 4, 1, n^4 + 4)$, $(-(n^4 + 4), -1, n^4 + 4)$, $(1, n^4 + 4, n^4 + 4)$, $(-1, -(n^4 + 4), n^4 + 4)$, $(n^2 - 2n + 2, n^2 + 2n + 2, n^4 + 4)$, $(-(n^2 - 2n + 2), -(n^2 + 2n + 2), n^4 + 4)$, $(n^2 + 2n + 2, n^2 - 2n + 2, n^4 + 4)$, $(-(n^2 + 2n + 2), -(n^2 - 2n + 2), n^4 + 4)$ sont deux à deux distincts, à coordonnées entières et appartiennent à $\Gamma \cap P_n$.

On a montré que, pour tout $n \geqslant 2$, le nombre de points d'intersection de Γ et du plan P_n dont les coordonnées sont des entiers relatifs est supérieur ou égal à 8.

e) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace tel que x, y et z soient des entiers relatifs.

$$M \in \gamma \cap P_5 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = xy \\ z = 5^4 + 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 629 \\ xy = 629 \end{array} \right. .$$

On a vu à la question 2 de la partie A que $629 = 17 \times 37$ où 17 et 37 sont deux nombres premiers. Les diviseurs de 629 sont donc 1, 17, 37 et 629.

L'égalité $xy = 629$ est donc équivalente à

$$(x, y) \in \{(1, 629), (-1, -629), (17, 37), (-17, -37), (37, 17), (-37, -17), (629, 1), (-629, -1)\}$$

et finalement les points de $\Gamma \cap P_5$ à coordonnées entières sont les huit points de coordonnées respectives $(1, 629, 629)$, $(-1, -629, 629)$, $(17, 37, 629)$, $(-17, -37, 629)$, $(37, 17, 629)$, $(-37, -17, 629)$, $(629, 1, 629)$ et $(-629, -1, 629)$.

