BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011

MATHEMATIQUES

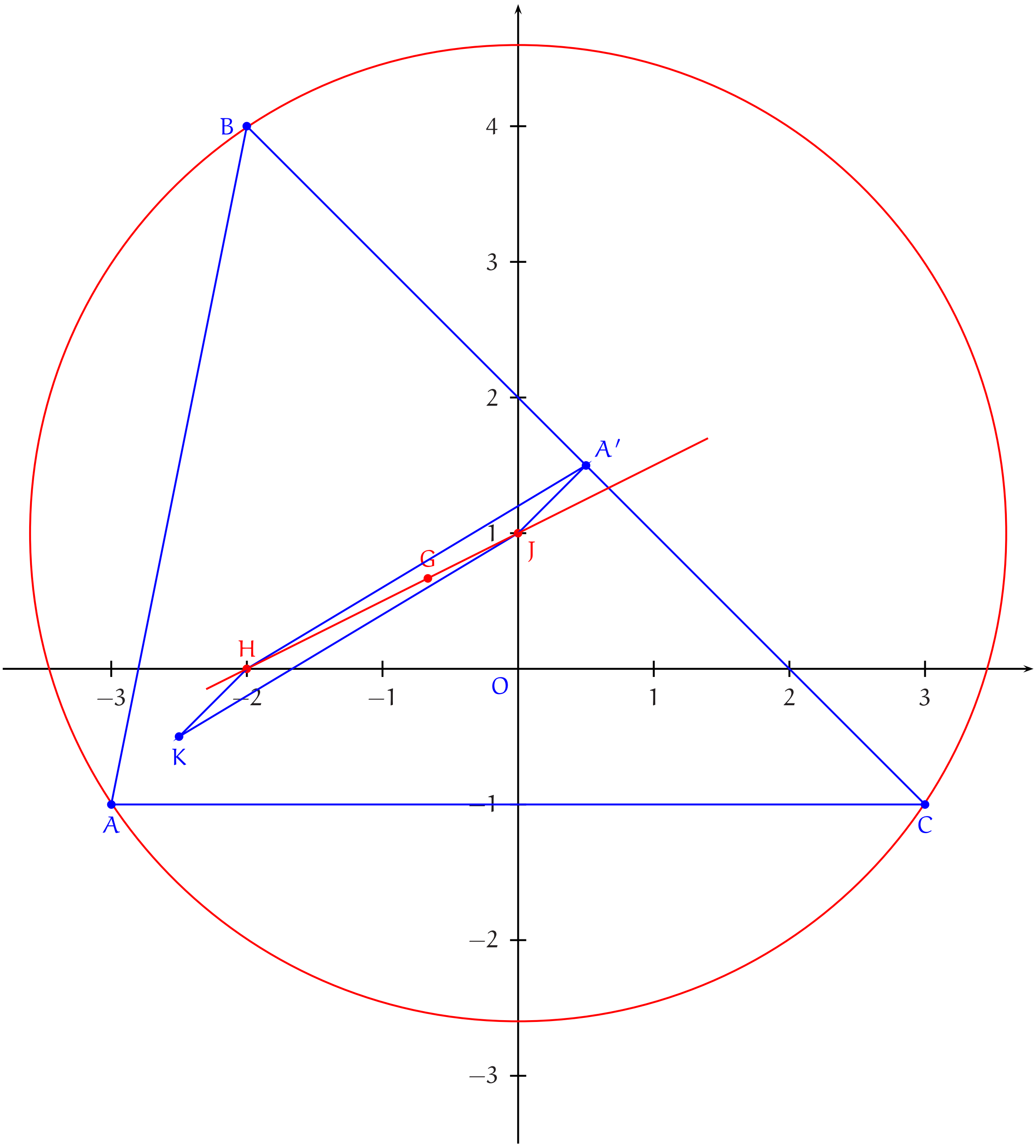
- Série S -

Enseignement de Spécialité

AntillesGuyane

EXERCICE 1

1) Figure.



2) • $JA = |a - i| = |-3 - i - i| = |-3 - 2i| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.
• $JB = |b - i| = |-2 + 4i - i| = |-2 + 3i| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.
• $JC = |c - i| = |3 - i - i| = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

En résumé, $JA = JB = JC = \sqrt{13}$ et donc

$$\boxed{\text{le point J est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC dont le rayon est } \sqrt{13}.}$$

3) $\dfrac{b-c}{h-a}=\dfrac{(-2+4i)-(3-i)}{-2-(-3-i)}=\dfrac{-5+5i}{1+i}=\dfrac{5i(1+i)}{1+i}=5i$. En particulier,

$$\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB}\right)=\arg\left(\frac{b-c}{h-a}\right)=\arg(5i)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi],$$

ou encore,

$$\boxed{\text{les droites } (AH) \text{ et } (BC) \text{ sont perpendiculaires.}}$$

4)

$$g=\frac{a+b+c}{3}=\frac{-3-i-2+4i+3-i}{3}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i.$$

5) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{JG}$ est $g-i=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}i-i=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}i$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{JH}$ est $h-i=-2-i$.

Donc, $h-i=3(g-i)$ ou encore $\overrightarrow{JH}=3\overrightarrow{JG}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{JH}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont colinéaires ou encore les points G, J et H sont alignés.

6) a) On note k l'affixe du point K.

$$k=\frac{a+h}{2}=\frac{-3-i-2}{2}=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i.$$

$$\boxed{\text{L'affixe du point } K \text{ est } -\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i.}$$

b) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{HA'}$ est $a'-h=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i-(-2)=\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}i$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{KJ}$ est $i-k=i-\left(-\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}i$.

Ainsi, $a'-h=i-k$ ou encore $\overrightarrow{HA'}=\overrightarrow{KJ}$ et par suite,

$$\boxed{\text{le quadrilatère } KHA'J \text{ est un parallélogramme.}}$$

EXERCICE 2

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (xe^x - 1) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (x+1)e^x.$$

Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $e^x > 0$ et $x + 1 > 0$. Donc, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $f'(x) > 0$.
On en déduit le tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	-1 ↗	$+\infty$

b) La fonction f est continue st strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Donc pour tout réel k de $\left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= [-1, +\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. En particulier, puisque 0 appartient à $[-1, +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. On note α cette solution.

La calculatrice fournit $f(0,56) = -0,01\ldots < 0$ et $f(0,57) = 0,007\ldots > 0$. Donc $f(0,56) < f(\alpha) < f(0,57)$ et, puisque la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que $0,56 < \alpha < 0,57$. Par suite,

$$\boxed{\alpha = 0,56 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par défaut.}}$$

c) Soit $x \geqslant 0$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, si $0 \leqslant x < \alpha$, alors $f(x) < f(\alpha)$ ou encore $f(x) < 0$ et si $x > \alpha$, alors $f(x) > f(\alpha)$. Ainsi, la fonction f est strictement négative sur $[0, \alpha[$, strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$ et enfin, la fonction f s'annule en α.

2) a) Pour $x > 0$, posons $g(x) = MN = e^x - \ln x$. La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x} = \frac{f(x)}{x}.$$

Sur $]0, +\infty[$, $g'(x)$ est du signe de $f(x)$. D'après la question 1)c), la fonction g' est strictement négative sur $[0, \alpha[$ puis strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$. On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $[0, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$ puis que la fonction g admet un minimum en α. On a montré que la distance MN est minimale lorsque $x = \alpha$.

La calculatrice fournit encore $f(0,567) < 0$ et $f(0,568) > 0$. Donc, $0,567 < \alpha < 0,568$ puis

$$e^{0,567} - \ln(0,568) < e^\alpha - \ln\alpha < e^{0,568} - \ln(0,567)$$

ou encore $2,328\ldots < e^\alpha - \ln\alpha < 2,332\ldots$ Par suite, $e^\alpha - \ln\alpha = 2,33$ à 10^{-2} près.

$$\boxed{MN_{min} = 2,33 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

b) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha = 1 \Leftrightarrow e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.

La dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$ est la fonction $x \mapsto e^x$. Donc, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α est e^α.
La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln x$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Donc, le coefficient directeur de la tangente à Γ au point d'abscisse α est $\dfrac{1}{\alpha}$.
Puisque $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$, ces coefficients directeurs sont égaux ou encore

$$\boxed{\text{les tangentes à } \mathscr{C} \text{ et } \Gamma \text{ en leur point d'abscisse } \alpha \text{ sont parallèles.}}$$

3) a) La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $h'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.
Donc,

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est une primitive de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

b) On note $\mathscr{A}$ l'aire à calculer. Sur le segment $[1, 2]$, les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln x$ sont continues et de plus, pour x réel de $[1, 2]$, on a $e^x > \ln x$. Donc

$$\mathscr{A} = \int_1^2 (e^x - \ln x)\, dx = [e^x - x\ln x + x]_1^2 = (e^2 - 2\ln 2 + 2) - (e^1 - \ln 1 + 1) = e^2 - e + 1 - 2\ln 2.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = e^2 - e + 1 - 2\ln 2 = 4,28 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

EXERCICE 3

1. **réponse b)**

2. **réponse b)**

3. **réponse a)**

4. **réponse a)**

Explication 1. On note X le nombre de fois où le tireur atteint la cible en n tentatives. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,
- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le tireur atteint la cible » avec une probabilité $p = 0,3$ ou « le tireur n'atteint pas la cible » avec une probabilité $1 - p = 0,7$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,3$.

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$. Or,

$$p_n = p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}(0,3)^0(0,7)^n = 1 - (0,7)^n,$$

puis

$$\begin{aligned}
p_n \geqslant 0,9 &\Leftrightarrow 1 - (0,7)^n \geqslant 0,9 \Leftrightarrow (0,7)^n \leqslant 0,1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{10}\right)^n \leqslant \frac{1}{10} \Leftrightarrow \left(\frac{10}{7}\right)^n \geqslant 10 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{10}{7}\right)^n\right) \geqslant \ln(10) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{10}{7}\right) \geqslant \ln(10) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(10)}{\ln\left(\frac{10}{7}\right)} \text{ (car } \ln\left(\frac{10}{7}\right) > 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 6,4\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 7 \text{ (car } n \text{ est entier).}
\end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse b).

Explication 2. La probabilité demandée est $p(X \geqslant 10000)$.

$$\begin{aligned}
p(X \geqslant 10000) &= 1 - p(X \leqslant 10000) = 1 - \int_0^{10000} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{10000} = 1 - \left(1 - e^{-0,0002\times 10000}\right) \\
&= e^{-2} = 0,135 \text{ au millième près.}
\end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse b).

Explication 3. On note X le nombre de fois où le joueur en 5 lancers. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,
- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le joueur gagne » avec une probabilité $p = \frac{5}{6}$ ou « le joueur perd » avec une probabilité $1 - p = \frac{1}{6}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{5}{6}$.

La probabilité demandée est $p(X = 2)$. Or,

$$p(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{5\times 4}{2}\times\frac{5^2}{6^5} = \frac{10\times 5^2}{6^5} = \frac{5^3}{3\times 6^4} = \frac{125}{3888}.$$

La bonne réponse est la réponse a).

Explication 4. Puisque les événements A et B sont indépendants, $p(A\cap B) = p(A)\times p(B) = 0,3\,p(B)$. Ensuite,

$$p(A) + p(B) - P(A\cap B) = p(A\cup B) \Rightarrow 0,3 + p(B) - 0,3\,p(B) = 0,65 \Rightarrow 0,7\,p(B) = 0,35 \Rightarrow p(B) = \frac{0,35}{0,7} \Rightarrow p(B) = 0,5.$$

La bonne réponse est la réponse a).

EXERCICE 4

1) a) Les entiers 7 et 11 sont deux nombres premiers distincts et en particulier sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $11u - 7v = 1$.

L'algorithme de Euclide nous fournit un tel couple :

$11 = 1 \times 7 + 4$
$7 = 1 \times 4 + 3$
$4 = 1 \times 3 + 1$,

et donc

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = 2 \times 4 - 7 = 2 \times (11 - 7) - 7 \\ &= 2 \times 11 - 3 \times 7. \end{aligned}$$

Un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $11u - 7v = 1$ est le couple $(2, 3)$.

b) En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par 5, on obtient $10 \times 11 - 15 \times 7 = 5$. Donc

une solution particulière de (E) est le couple $(x_0, y_0) = (10, 15)$.

c) Soient x et y deux entiers relatifs.

$$11x - 7y = 5 \Leftrightarrow 11x - 7y = 11x_0 - 7y_0 \Leftrightarrow 11(x - x_0) = 7(y - y_0).$$

Ensuite, si $11(x - x_0) = 7(y - y_0)$, alors l'entier 7 divise $11(x - x_0)$ et, puisque 7 et 11 sont premiers entre eux, 7 divise $x - x_0$ d'après le théorème de Gauss. On en déduit qu'il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 7k$ ou encore $x = x_0 + 7k$. De même, il existe nécessairement un entier k' tel que $y = y_0 + 11k'$.

Soient alors k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 7k$ et $y = y_0 + 11k'$.

$$11x - 7y = 5 \Leftrightarrow 11(x_0 + 7k) - 7(y_0 + 11k') = 5 \Leftrightarrow 11x_0 - 7y_0 + 77(k - k') = 5 \Leftrightarrow 7(k - k') = 0 \Leftrightarrow k' = k.$$

Les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) sont les couples de la forme $(10 + 7k, 15 + 11k)$ où k est un entier relatif.

d) Soient k un entier relatif puis $x = 10 + 7k$ et $y = 15 + 11k$.

- $0 \leqslant x \leqslant 50 \Leftrightarrow 0 \leqslant 10 + 7k \leqslant 50 \Leftrightarrow -10 \leqslant 7k \leqslant 40 \Leftrightarrow -\dfrac{10}{7} \leqslant k \leqslant \dfrac{40}{7} \Leftrightarrow -1 \leqslant k \leqslant 5$.
- $0 \leqslant y \leqslant 50 \Leftrightarrow 0 \leqslant 15 + 11k \leqslant 50 \Leftrightarrow -15 \leqslant 11k \leqslant 35 \Leftrightarrow -\dfrac{15}{11} \leqslant k \leqslant \dfrac{35}{11} \Leftrightarrow -1 \leqslant k \leqslant 3$.

Par suite, $(0 \leqslant x \leqslant 50$ et $0 \leqslant y \leqslant 50) \Leftrightarrow -1 \leqslant k \leqslant 3$. Il y a donc exactement cinq points de la droite D appartenant à l'ensemble $\mathscr{C}$ et dont les coordonnées sont des nombres entiers, obtenus quand $k = -1$, $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ ou $k = 3$, à savoir les points de coordonnées respectives $(3, 4)$, $(10, 15)$, $(17, 26)$, $(24, 37)$ et $(31, 48)$.

2) a) Soient x et y deux entiers relatifs.
Modulo 5, $11x^2 \equiv x^2$, $-7y^2 \equiv -2y^2$ et $5 \equiv 0$. Donc si $11x^2 - 7y^2 = 5$, alors, modulo 5, $x^2 - 2y^2 \equiv 0$ ou encore $x^2 \equiv 2y^2$.

Si le couple (x, y) est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2$ (mod 5).

b)

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à	0	1	4	4	1

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à	0	2	3	3	2

Les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 par 5 sont 0, 1 et 4.
Les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $2y^2$ par 5 sont 0, 2 et 3.

c) D'après la question a), si le couple (x, y) est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (F), alors nécessairement $x^2 \equiv 2y^2$ (mod 5). D'après la question précédente, la seule coïncidence est le cas $x^2 \equiv 0$ (mod 5) et $2y^2 \equiv 0$ (mod 5).

Ainsi x^2 est nécessairement divisible par 5. Le premier tableau de la question b) montre alors que $x \equiv 0 \pmod 5$ ou encore que x est divisible par 5.
De même, $2y^2$ est nécessairement divisible par 5 puis y est divisible par 5 d'après le deuxième tableau de la question b).

On a montré que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (F), alors nécessairement x et y sont divisibles par 5.

3) Si x est divisible par 5, alors il existe un entier relatif k tel que $x = 5k$. On en déduit que $11x^2 = 11 \times (5k)^2 = 11k^2 \times 25$ et donc $11x^2$ est divisible par 25 (car $11k^2$ est un entier). De même, si y est divisible par 5, $7y^2$ est divisible par 25.

En résumé, si x et y sont divisibles par 5, alors $11x^2$ et $7y^2$ sont divisible par 25 et il en est de même de $11x^2 - 7y^2$. Comme 5 n'est pas divisible par 25, on a en particulier $11x^2 - 7y^2 \neq 5$ et donc le couple (x, y) n'est pas solution de l'équation (F).
On a montré que

$$\boxed{\text{l'équation } (F) \text{ n'a pas de solution.}}$$

