BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
Réunion

EXERCICE 1

1. Réponse 2

2. Réponse 4

3. Réponse 3

4. Réponse 1

Explication 1. Soit $M(-8+2t, 7-t, 6+t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$2x_M + 3y_M - z_M + 4 = 2(-8+2t) + 3(7-t) - (6+t) + 4 = 3.$$

Donc, pour tout point M de $\mathscr{D}$, $2x_M + 3y_M - z_M + 4 \neq 0$ et le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont aucun point commun. La bonne réponse est la réponse 2.

Explication 2. Le plan $\mathscr{P}$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2,3,-1)$ et le plan $\mathscr{P}'$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}'(1,4,-3)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants en une droite (D). Un vecteur directeur de (D) doit être orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$.

$$(-1) \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times (-1) = -2 + 3 - 2 = -1 \neq 0.$$

Donc le vecteur de coordonnées $(-1,1,2)$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et par suite n'est pas un vecteur directeur de (D). La bonne réponse est donc nécessairement la dernière. Vérifions le.

$$(-1) \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times (-1) = -2 + 3 - 1 = 0 \text{ et } (-1) \times 1 + 1 \times 4 + 1 \times (-3) = -1 + 4 - 3 = 0.$$

Le vecteur de coordonnées $(-1,1,1)$ est effectivement orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ et donc est effectivement un vecteur directeur de (D). La bonne réponse est la réponse 4.

Explication 3. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned} MA = MB &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = (x+3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z + 1 + 4 + 16 = x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 2z + 9 + 16 + 1 \\ &\Leftrightarrow -8x + 4y + 10z - 5 = 0 \Leftrightarrow -4x + 2y + 5z - \frac{5}{2} = 0. \end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse 3.

Explication 4. Soit $G = \text{bar}\{A(1), B(-3)\}$. Soit M un point de l'espace.

$$\left\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right\| = 5 \Leftrightarrow \left\|(1-3)\overrightarrow{MG}\right\| = 5 \Leftrightarrow 2MG = 5 \Leftrightarrow MG = \frac{5}{2}.$$

L'ensemble considéré est donc la sphère de centre G et de rayon $\frac{5}{2}$. De plus,

- $x_G = \dfrac{x_A - 3x_B}{1-3} = \dfrac{1 - 3 \times (-3)}{-2} = -5,$
- $y_G = \dfrac{y_A - 3y_B}{1-3} = \dfrac{2 - 3 \times (4)}{-2} = 5,$
- $z_G = \dfrac{z_A - 3z_B}{1-3} = \dfrac{-4 - 3 \times 1}{-2} = \dfrac{7}{2}.$

Donc les coordonnées du point G sont $\left(-5, 5, \dfrac{7}{2}\right)$. La bonne réponse est la réponse 1.

EXERCICE 2

1) Le nombre de tirages simultanés de 4 bulletins parmi 10 est

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 10 \times 3 \times 7 = 210.$$

Il y a $\binom{4}{4} = 1$ tirage simultané de 4 bulletins parmi les 4 bulletins comportant une question d'histoire. Donc $p(A) = \dfrac{1}{210}$.
D'autre part, l'événement B est l'événement contraire de l'événement « aucun bulletin ne comporte une question de sport ».
Il y a 8 bulletins ne comportant pas une question de sport puis

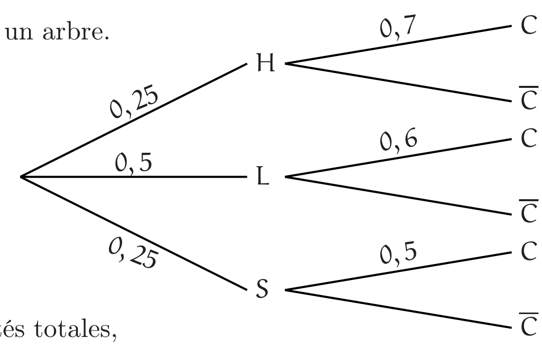
$$\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} = 7 \times 2 \times 5 = 70$$

tirages simultanés de 4 bulletins parmi les 8 ne comportant pas une question de sport.

Donc $p(B) = 1 - \dfrac{\binom{8}{4}}{\binom{10}{4}} = 1 - \dfrac{70}{210} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{p(A) = \frac{1}{210} \text{ et } p(B) = \frac{2}{3}.}$$

2) a) Représentons la situation par un arbre.



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(C) &= p(H \cap C) + p(L \cap C) + p(S \cap C) = p(H) \times p_H(C) + p(L) \times p_L(C) + p(S) \times p_S(C) \\ &= 0,25 \times 0,7 + 0,5 \times 0,6 + 0,25 \times 0,5 = 0,175 + 0,3 + 0,125 = 0,6. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(C) = 0,6.}$$

c) La probabilité demandée est $p_C(S)$. Or

$$P_C(S) = \frac{p(C \cap S)}{p(C)} = \frac{p(S) \times p_S(C)}{p(C)} = \frac{0,25 \times 0,5}{0,6} = \frac{0,125}{0,6} = \frac{125}{600} = \frac{5}{24}.$$

$$\boxed{p_C(S) = \frac{5}{24}.}$$

3) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,
- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la réponse donnée à une question est correcte » avec une probabilité $p = 0,7$ ou « la réponse donnée à une question n'est pas correctes » avec une probabilité $1 - p = 0,3$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,7$.

On sait alors que

$$\boxed{\text{pour tout entier } k \text{ compris entre 0 et 10, } p(X = k) = \binom{10}{k} \times 0,7^k \times 0,3^{10-k}.}$$

b) $p(X \geqslant 9) = p(X = 9) + p(X = 10) = 10 \times 0,7^9 \times 0,3^1 + 0,7^{10} = 0,15$ arrondi à 10^{-2}.

$$\boxed{p(X \geqslant 9) = 0,15 \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

EXERCICE 3

Partie A

1) a) Pour tout réel x, $e^{2x}+1>1$ et en particulier, pour tout réel x, $e^{2x}+1\neq 0$. Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$f'(x)=0-4\frac{e^x(e^{2x}+1)-e^x(2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}=-4\frac{e^x(e^{2x}+1-2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}=-4\frac{e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}=4\frac{e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f'(x)=4\frac{e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}.}$$

b) Pour tout réel $x>0$, $2x>0$ et donc $e^{2x}>1$ puis $e^{2x}-1>0$. D'autre part, pour tout réel $x>0$, $4e^x>0$ et $(e^{2x}+1)^2>0$. On en déduit que pour tout réel $x>0$, $f'(x)>0$.

Ainsi, la fonction f' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[.}$$

2) Soit x un réel.

$$f(-x)=1-\frac{4e^{-x}}{e^{-2x}+1}=1-\frac{\frac{4}{e^x}}{\frac{1}{e^{2x}}+1}=1-\frac{\frac{4}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}=1-\frac{4}{e^x}\times\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}=1-\frac{4e^x}{e^{2x}+1}=f(x).$$

En résumé, pour tout réel x, $f(-x)=f(x)$. Donc la fonction f est paire et par suite, la droite d'équation $x=0$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

$$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C} \text{ est symétrique par rapport à } (Oy).}$$

3) a) Soit a l'abscisse du point A. a est un réel positif solution de l'équation $f(X)=0$. Soit X un réel.

$$\begin{aligned}f(X)=0 &\Leftrightarrow 1-\frac{4e^X}{e^{2X}+1}=0\Leftrightarrow\frac{e^{2X}-4e^X+1}{e^{2X}+1}=0\Leftrightarrow e^{2X}-4e^X+1=0\ (\text{car } e^{2X}+1\neq 0)\\ &\Leftrightarrow \left(e^X\right)^2-4\left(e^X\right)+1=0\Leftrightarrow e^X \text{ est solution de l'équation } x^2-4x+1=0.\end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation $x^2-4x+1=0$ est $\Delta=(-4)^2-4\times1\times1=12$. Donc l'équation $x^2-4x+1=0$ admet deux solutions réelles distinctes à savoir $x_1=\dfrac{4+\sqrt{12}}{2}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2(2+\sqrt{3})}{2}=2+\sqrt{3}$ et $x_2=2-\sqrt{3}$.

Ensuite, puisque $2+\sqrt{3}>0$ et $2-\sqrt{3}>0$, pour tout réel X on a

$$f(X)=0\Leftrightarrow e^X=2+\sqrt{3}\text{ ou } e^X=2-\sqrt{3}\Leftrightarrow X=\ln(2+\sqrt{3})\text{ ou } X=\ln(2-\sqrt{3}).$$

Enfin, $\ln(2+\sqrt{3})=1,3\ldots>0$ et $\ln(2-\sqrt{3})=-1,3\ldots<0$. Par suite, l'équation $f(X)=0$ admet une solution positive et une seule à savoir $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ ou encore

$$\boxed{a=\ln(2+\sqrt{3}).}$$

b) Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, si $0\leqslant x<a$, on a $f(x)<f(a)=0$ et si $x>a$, on a $f(x)>0$. Puisque f est paire, on en déduit le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x :

x	$-\infty$		$\ln(2-\sqrt{3})$		$\ln(2+\sqrt{3})$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie B

1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$: la fonction F est la primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Pour tout réel x, on a $F'(x) = f(x)$ dont le signe a été étudié à la question 3)b) de la partie A. On en déduit le tableau de variations de la fonction F :

x	$-\infty$		$\ln(2-\sqrt{3})$		$\ln(2+\sqrt{3})$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
F		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2) D'après la question 3)b) de la partie A, la fonction f est négative sur $[0, a]$ et donc $-F(a)$ est l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. En particulier, $-F(a) \geqslant 0$ ou encore $F(a) \leqslant 0$.
Notons C le point de coordonnées $(0, f(0)) = (0, -1)$ et D le point de coordonnées $(a, -1)$. Puisque la fonction f est croissante sur $[0, a]$, le domaine $\mathscr{D}$ est contenu dans le rectangle $OADC$. Son aire $-F(a)$ est inférieure ou égale à l'aire de ce rectangle c'est-à-dire $1 \times a = a$. Ainsi, $-F(a) \leqslant a$ ou encore $F(a) \geqslant -a$. En résumé,

$$\boxed{-a \leqslant F(a) \leqslant 0.}$$

3) a) Soit t un réel positif. On a $e^{2t} + 1 \geqslant e^{2t} > 0$ et donc $\dfrac{1}{e^{2t}+1} \leqslant \dfrac{1}{e^{2t}}$. Ensuite, puisque $-4e^t < 0$, on en déduit que $-4\dfrac{e^t}{e^{2t}+1} \geqslant -4\dfrac{e^t}{e^{2t}}$ puis que $f(t) \geqslant 1 - 4\dfrac{e^t}{e^{2t}} = 1 - 4e^{-t}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } t,\ f(t) \geqslant 1 - 4e^{-t}.}$$

b) Soit x un réel positif. Pour tout réel t de $[0, x]$, $f(t) \geqslant 1 - 4e^{-t}$ et donc, par croissance de l'intégrale, on obtient

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \geqslant \int_0^x (1 - 4e^{-t})\,dt = \left[t + 4e^{-t}\right]_0^x = x + 4e^{-x} - 4 \geqslant x - 4.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } x,\ F(x) \geqslant x - 4.}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 4 = +\infty$, on en déduit encore que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.}$$

4) Soit t un réel négatif ou nul.

$$f(t) = 1 - \frac{4e^t}{e^{2t}+1} \geqslant 1 - \frac{4e^t}{0+1} = 1 - 4e^t.$$

Soit x un réel strictement négatif. Puisque pour tout réel t de $[x, 0]$ on a $f(t) \geqslant 1 - 4e^t$, par croissance de l'intégrale on en déduit que

$$\int_x^0 f(t)\,dt \geqslant \int_x^0 (1 - 4e^t)\,dt = \left[t - 4e^t\right]_x^0 = -4 - (x - 4e^x) = -x - 4 + 4e^x$$

et par suite,

$$F(x) = -\int_x^0 f(t)\,dt \leqslant x + 4 - 4e^x.$$

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 4 - 4e^x = -\infty$. Mais alors

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty.}$$

EXERCICE 4

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Si $B = A$, alors $C = A$ puis $c = a$.
Si $B \neq A$, alors $C \neq A$ puis $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \dfrac{|c-a|}{|b-a|} = \dfrac{AC}{AB} = 1$ et d'autre part,

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AC}\right) - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \theta\ [2\pi].$$

Donc, $\dfrac{c-a}{b-a}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ ou encore $\dfrac{c-a}{b-a} = e^{i\theta}$ ou enfin $c = a + e^{i\theta}(b-a)$.
Cette dernière égalité reste vraie quand $b = a$ et on a montré dans tous les cas que

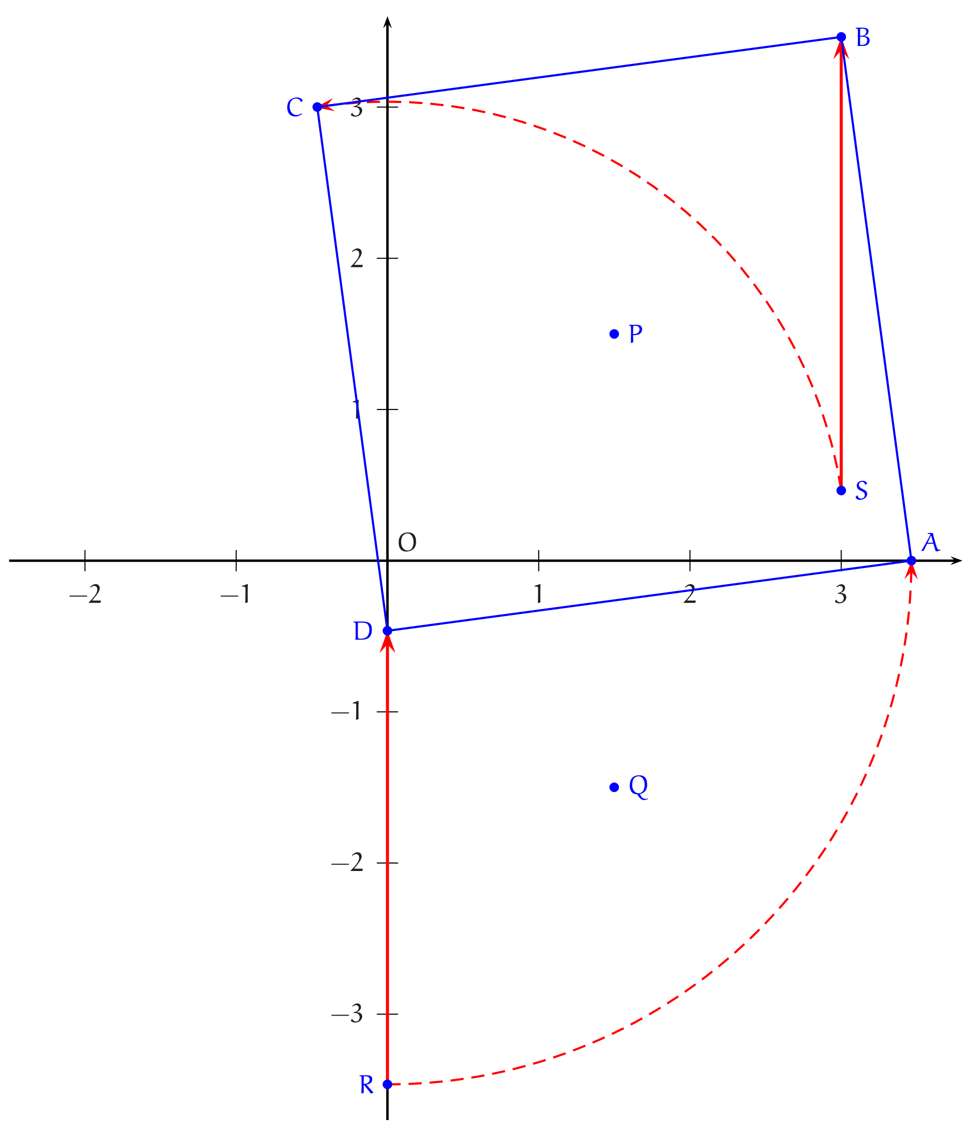
$$\boxed{c = a + e^{i\theta}(b-a).}$$

Partie B

1) Le discriminant de l'équation proposée est $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 9 = 36 - 72 = -36 = (6i)^2$. Donc l'équation proposée admet deux solutions non réelles conjuguées $z_1 = \dfrac{6+6i}{4} = \dfrac{3}{2}(1+i)$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{3}{2}(1-i)$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{2}(1+i), \frac{3}{2}(1-i)\right\}.}$$

2) Figure.



3) On sait que Q est le milieu du segment [RS] et donc $\dfrac{z_S + z_R}{2} = z_Q$ puis

$$z_S = 2z_Q - z_R = 2 \times \frac{3}{2}(1 - i) - (-2i\sqrt{3}) = 3 - 3i + 2i\sqrt{3} = 3 + i\left(2\sqrt{3} - 3\right).$$

$$\boxed{z_S = 3 + i\left(2\sqrt{3} - 3\right).}$$

4) L'expression complexe de r est $z' = e^{i\pi/2}z$ ou encore $z' = iz$. Par suite,

$$z_A = iz_R = i\left(-2i\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} \text{ et } z_C = iz_S = i\left(3 + \left(2\sqrt{3} - 3\right)i\right) = -2\sqrt{3} + 3 + 3i.$$

$$\boxed{z_A = 2\sqrt{3} \text{ et } z_C = -2\sqrt{3} + 3 + 3i.}$$

5) L'affixe du vecteur $3\overrightarrow{v}$ est $3i$ et donc l'expression complexe de la translation de vecteur $3\overrightarrow{v}$ est $z' = z + 3i$. Par suite,

$$z_B = z_S + 3i = 3 + \left(2\sqrt{3} - 3\right)i + 3i = 3 + 2i\sqrt{3} \text{ et } z_D = z_R + 3i = -2i\sqrt{3} + 3i = \left(3 - 2\sqrt{3}\right)i.$$

$$\boxed{z_B = 3 + 2i\sqrt{3} \text{ et } z_D = \left(3 - 2\sqrt{3}\right)i.}$$

6) a) $$\frac{z_C - z_P}{z_B - z_P} = \frac{-2\sqrt{3} + 3 + 3i - \frac{3}{2}(1+i)}{3 + 2i\sqrt{3} - \frac{3}{2}(1+i)} = \frac{\frac{3}{2} - 2\sqrt{3} + \frac{3}{2}i}{\frac{3}{2} + i\left(-\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right)} = \frac{i\left(\frac{3}{2} + i\left(-\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right)\right)}{\frac{3}{2} + i\left(-\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right)} = i.$$

b) Puisque $i = e^{i\pi/2}$, la question a) montre que $z_C = z_P + e^{i\pi/2}(z_B - z_P)$ et donc que le point C est l'image du point B par la rotation de centre P et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ ou encore $PC = PB$ et $\left(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

Maintenant, $\dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3 + 3i}{2} = \dfrac{3}{2}(1+i) = z_P$ et $\dfrac{z_B + z_D}{2} = \dfrac{3 + 2i\sqrt{3} + \left(3 - 2\sqrt{3}\right)i}{2} = \dfrac{3}{2}(1+i) = z_P$.

Donc P est le milieu des segments [AC] et [BD]. Ainsi,

- les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu et donc ABCD est un parallélogramme.
- les diagonales du parallélogramme ABCD ont même longueur car $AC = 2PC = 2PB = BD$ et donc le parallélogramme ABCD est un rectangle.
- les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires car $\left(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ et donc le parallélogramme ABCD est aussi un losange.

Finalement,

$$\boxed{\text{le quadrilatère ABCD est un carré.}}$$

