BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Pondichéry

EXERCICE 1

Partie I

1. B

2. A

3. C

4. C

1) La fonction f_2 est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = +\infty$.

2) La fonction f_2 est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$. Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x) = 0$

3) On ne peut pas conclure car par exemple les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$ ont un graphe ayant l'allure de $\mathscr{C}_1$, mais seule la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$ admet une asymptote oblique.

4) $\mathscr{C}_2$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_1$ sur $]0, 1[$, strictement au-dessous sur $]1, +\infty[$ et enfin, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent en leur point d'abscisse 1. Donc le tableau de signe de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

x	0		1		$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Partie II

1) Limite en 0. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$ et donc

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\ln(x) + 1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -\infty.}$$

Limite en $+\infty$. Pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $f(x) = \ln(x) + 1 - \dfrac{1}{x}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$. Par suite,

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

2) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Donc, la fonction f' est strictement positive sur $]0, +\infty[$ puis la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$
f	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

3) On note tout d'abord que $f(1) = \ln(1) + 1 - 1 = 0$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, si x est un réel tel que $0 < x < 1$, on a $f(x) < f(1)$ ou encore $f(x) < 0$. Si x est un réel tel que $x > 1$, on a $f(x) > f(1)$ ou encore $f(x) > 0$. On résume ces résultats dans un tableau.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

4) La fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x} = f(x).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

5) La fonction F est dérivable sur $[1, +\infty[$ et sa dérivée, à savoir f, est strictement positive sur $]1, +\infty[$ d'après la question 3). Donc, la fonction F est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

6) La fonction F est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Donc pour tout réel k de l'intervalle $\left[F(1), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\right[$, l'équation $F(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[1, +\infty[$.
Or, $F(1) = 0$ et donc $F(1) < 1 - \frac{1}{e}$ et d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\ln(x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) > 1 - \frac{1}{e}$.
Ainsi, $1 - \frac{1}{e} \in \left[F(1), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\right[$ et donc l'équation $F(x) = 1 - \frac{1}{e}$ admet une solution et une seule, notée α, dans $[1, +\infty[$.

7) $F(\alpha) = 1 - \frac{1}{e} = 0,63\ldots$ Ensuite, $F(1,9) = 0,57\ldots$ et $F(2) = 0,69\ldots$. Donc $F(1,9) < F(\alpha) < F(2)$. Puisque la fonction F est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit que

$$\boxed{1,9 < \alpha < 2.}$$

Partie III

1) Soit x un réel strictement positif.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

$$\boxed{\text{Le point } A \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{1}{e}, 0\right).}$$

2) Soit x un réel strictement positif.

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow \ln(x) + 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

D'après l'étude du signe de la fonction f effectuée à la question II.3), l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule à savoir $x = 1$. Comme $g(1) = h(1) = 1$,

$$\boxed{\text{le point } P \text{ a pour coordonnées } (1, 1).}$$

3) (a) Pour tout réel x de $]0, +\infty[$, on a $g(x) - h(x) = -\ln(x) - 1 + \frac{1}{x} = -f(x)$. D'après la question II.3), la fonction f est négative sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ et donc la fonction $g - h$ est positive sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Par suite,

$$\mathscr{A} = \int_{1/e}^{1} (g(x) - h(x))\, dx = \int_{1/e}^{1} (-f(x))\, dx.$$

(b) D'après la question II.4), on en déduit que

$$\mathscr{A} = [-F(x)]_{1/e}^{1} = -F(1) + F\left(\frac{1}{e}\right) = -0 + \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}\ln(e) + \ln(e) = 1 - \frac{1}{e}.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 1 - \frac{1}{e}.}$$

4) a) Soit t un réel strictement supérieur à 1. Dans ce cas, pour tout réel x de $[1, t]$, on a $h(x) - g(x) = f(x) \geqslant 0$. Par suite,

$$\mathscr{B}_t = \int_1^t (h(x) - g(x))\ dx = \int_1^t f(x)\ dx = [F(x)]_1^t = F(t) - F(1) = F(t) = t\ln(t) - \ln(t).$$

(b) Soit $t \geqslant 1$. D'après la question II.6),

$$\mathcal{B}_t = \mathscr{A} \Leftrightarrow F(t) = 1 - \frac{1}{e} \Leftrightarrow t = \alpha.$$

Il existe un réel t et un seul tel que $\mathscr{B}_t = \mathscr{A}$: le réel α défini à la question II.6).

EXERCICE 2

Partie I

1) (a) Soit I le milieu du segment [BD]. Puisque le triangle ABD est équilatéral, la droite (AI) est la médiatrice du segment [BD] dans le triangle ABD. Par suite, $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} = 0$. D'autre part, puisque le triangle BCD est équilatéral et que A' est le centre de gravité du triangle BCD, la droite $(A'I)$ est également la médiatrice du segment [BD] dans le triangle BCD. Par suite, $\overrightarrow{IA'}.\overrightarrow{BD} = 0$. Mais alors,

$$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IA'}\right).\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{IA'}.\overrightarrow{BD} = 0.$$

En échangeant les rôles des points C et D, on a de même $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = 0$.

(b) D'après la question précédente, la droite (AA') est orthogonale aux droites (BC) et (BD) ou encore la droite (AA') est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BCD). On sait alors que la droite (AA') est orthogonale à la face BCD.

2) Par associativité du barycentre,

$$G = \text{bar}\{A(1), B(1), C(1), D(1)\} = \text{bar}\{A(1), A'(3)\}.$$

Puisque le point G est un barycentre des points A et A', le point G appartient à la droite (AA'). En échangeant les rôles des points A, B, C et D, on a aussi montré que le point G appartient aux droites (BB'), (CC') et (DD'). Donc les médianes du tétraèdre $ABCD$ sont concourantes en G.

Partie II

1) $OP = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ et $OQ = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$. Donc $OP \neq OQ$. Par suite, le triangle OPQ n'est pas équilatéral puis le tétraèdre $OPQR$ n'est pas régulier.

2) $x_{P'} = \dfrac{1}{3}(x_O + x_Q + x_R) = \dfrac{1}{3}(0 + 4 - 2) = \dfrac{2}{3}$ puis $y_{P'} = \dfrac{1}{3}(y_O + y_Q + y_R) = \dfrac{1}{3}(0 + 2 + 3) = \dfrac{5}{3}$ et enfin, $z_{P'} = \dfrac{1}{3}(z_O + z_Q + z_R) = \dfrac{1}{3}(0 - 1 + 0) = -\dfrac{1}{3}$.

$$\boxed{\text{Les coordonnées du point } P' \text{ sont } \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right).}$$

3) Le vecteur $\overrightarrow{OQ}$ a pour coordonnées $(4, 2, -1)$ et le vecteur $\overrightarrow{OR}$ a pour coordonnées $(-2, 3, 0)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points O, Q et R définissent bien un plan et un seul.

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 2y + 16z = 0$.

- $3x_O + 2y_O + 16z_O = 0$. Donc le point O appartient au plan $\mathcal{P}$.
- $3x_Q + 2y_Q + 16z_Q = 12 + 4 - 16 = 0$. Donc le point Q appartient au plan $\mathcal{P}$.
- $3x_R + 2y_R + 16z_R = -6 + 6 + 0 = 0$. Donc le point R appartient au plan $\mathcal{P}$.

Puisque les points O, Q et R appartiennent au plan $\mathcal{P}$ et que ces points définissent un unique plan, le plan $\mathcal{P}$ et le plan (OQR) sont confondus. On en déduit qu'une équation cartésienne du plan (OQR) est $3x + 2y + 16z = 0$.

4) Un vecteur normal au plan (OQR) est alors le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(3, 2, 16)$. Le vecteur $\overrightarrow{PP'}$ a quant à lui pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3} - 1, \dfrac{5}{3} - 2, -\dfrac{1}{3} - 3\right)$ ou encore $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{10}{3}\right)$.

S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{PP'} = k\overrightarrow{n}$, alors d'une part, $3k = -\dfrac{1}{3}$ et donc $k = -\dfrac{1}{9}$, mais aussi $2k = -\dfrac{1}{3}$ et donc $k = -\dfrac{1}{6}$ ce qui est impossible.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{PP'}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas colinéaires ou encore la médiane (PP') n'est pas orthogonale à la face opposée OQR. La propriété $(\mathscr{P}_1)$ n'est donc pas vraie pour le tétraèdre $OPQR$ et plus généralement, la propriété $(\mathscr{P}_1)$ n'est pas nécessairement vraie dans un tétraèdre quelconque.

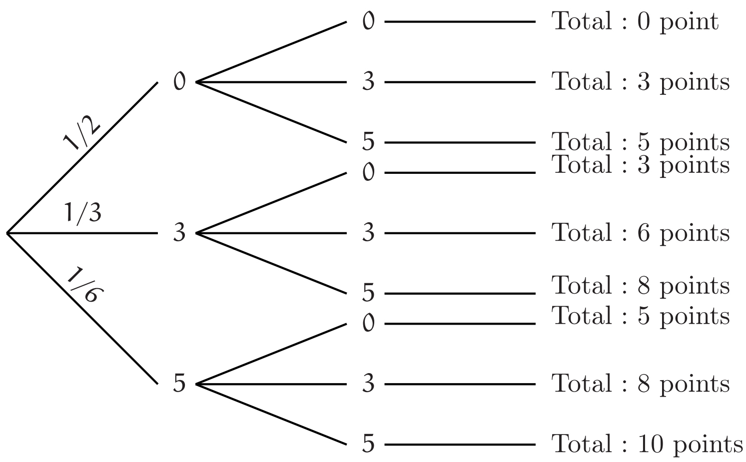
EXERCICE 3

1) On a $p_5 = \dfrac{1}{3}p_0$ puis $p_3 = 2p_5 = \dfrac{2}{3}p_0$.

L'égalité $p_0 + p_3 + p_5 = 1$ fournit alors $\left(1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\right) p_0 = 1$ puis $p_0 = \dfrac{1}{2}$, $p_3 = \dfrac{1}{3}$ et $p_5 = \dfrac{1}{6}$.

$$\boxed{p_0 = \frac{1}{2},\ p_3 = \frac{1}{3} \text{ et } p_5 = \frac{1}{6}.}$$

2) (a) Représentons la situation par un arbre.



Les événements amenant au gain de la partie en deux lancers sont (3 points, 5 points), (5points, 3 points) et (5 points, 5 points).
Leurs probabilités respectives sont $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{18}$, $\dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{18}$ et $\dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$. Donc

$$p(G_2) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}.$$

$$\boxed{p(G_2) = \frac{5}{36}.}$$

(b) D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que le joueur gagne la partie est

$$p(G) = p(G_2) + p(G_3) = \frac{5}{36} + \frac{7}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

et donc $p(P) = 1 - p(G) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{p(P) = \frac{2}{3}.}$$

3) Notons Y le nombre de fois que l'événement P est réalisé. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli.
En effet,

- 6 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'événement P est réalisé » avec une probabilité $p = \dfrac{2}{3}$ ou « l'événement $\overline{P}$ est réalisé » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{1}{3}$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est $p(Y \leqslant 5)$. Or

$$p(Y \leqslant 5) = 1 - p(Y = 6) = 1 - \binom{6}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

$$\boxed{\text{La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est } 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 \text{ ou encore } 0,91 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

4) (a) Loi de probabilité de X. D'après les questions précédentes, $p(X=-2)=p(P)=\dfrac{2}{3}$ puis $p(X=1)=p(G_3)=\dfrac{7}{36}$ et $p(X=3)=p(G_2)=\dfrac{5}{36}$. Résumons ces résultats dans un tableau.

Valeurs prises par X : x_i	-2	1	3
$p(X=x_i)$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{7}{36}$	$\dfrac{5}{36}$

(b) L'espérance de X est $E(X)=\dfrac{2}{3}\times(-2)+\dfrac{7}{36}\times 1+\dfrac{5}{36}\times 3=-\dfrac{4}{3}+\dfrac{22}{36}=-\dfrac{24}{18}+\dfrac{11}{18}=-\dfrac{13}{18}$.

$$\boxed{E(X)=-\frac{13}{18}.}$$

Puisque $E(X)<0$, le jeu est défavorable au joueur.