BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Polynésie

EXERCICE 1

1. VRAI

2. VRAI

3. FAUX

4. VRAI

5. VRAI

Justification 1. • $OA = |z_A| = |2-5i| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{29}$.
• $OB = |z_B| = |7-3i| = \sqrt{7^2+(-3)^2} = \sqrt{58}$.
• $AB = |z_B - z_A| = |(7-3i)-(2-5i)| = |5+2i| = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$.

Donc, $AB = AO$ et le triangle OAB est isocèle en A. De plus, $AO^2 + AB^2 = 29+29 = 58 = OB^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAB est rectangle en A. Finalement, le triangle OAB est rectangle et isocèle en A et la proposition 1 est vraie.

Justification 2. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned}|z-i| = |z+2i| &\Leftrightarrow |x+i(y-1)|^2 = |x+i(y+2)|^2 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = x^2+(y+2)^2 \Leftrightarrow y^2-2y+1 = y^2+4y+4\\ &\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(Δ) est donc une droite parallèle à l'axe des abscisses qui est l'axe des réels. La proposition 2 est vraie.

Justification 3. $3+i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{3}e^{i\pi/6}$. Ensuite, si n est un entier naturel non nul,

$$z^{3n} = \left(2\sqrt{3}e^{i\pi/6}\right)^{3n} = \left(2\sqrt{3}\right)^{3n} e^{i3n\pi/6} = \left(2\sqrt{3}\right)^{3n} e^{in\pi/2}.$$

En particulier, si $n = 2$, on obtient

$$z^6 = z^{3\times 2} = \left(2\sqrt{3}\right)^{3\times 2} e^{i2\pi/2} = -\left(2\sqrt{3}\right)^6$$

qui n'est pas un imaginaire pur. Donc la proposition 3 est fausse.

Justification 4. Un nombre complexe non nul d'argument $\frac{\pi}{2}$ est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive. Posons $z = iy$ où y est un réel strictement positif.

$|i+z| = |i(y+1)| = |i|\,|y+1| = y+1$ et $1+|z| = 1+|iy| = 1+|i|\,|y| = y+1$. Donc $|i+z| = 1+|z|$ et la proposition 4 est vraie.

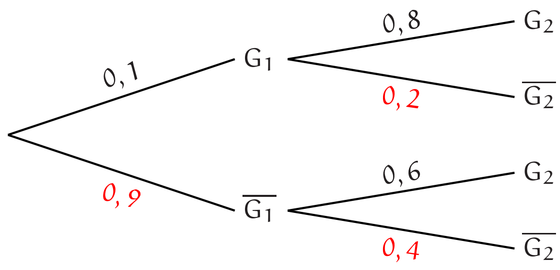
Justification 5. Soit z un nombre complexe de module 1. Il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$. Alors

$$z^2+\frac{1}{z^2} = (e^{i\theta})^2 + \frac{1}{(e^{i\theta})^2} = e^{2i\theta}+e^{-2i\theta} = \cos(2\theta)+i\sin(2\theta)+\cos(2\theta)-i\sin(2\theta) = 2\cos(2\theta).$$

Donc $z^2+\frac{1}{z^2}$ est un nombre réel et la proposition 5 est vraie.

EXERCICE 2

1) Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_2 = p(G_2) &= p(G_1 \cap G_2) + p(\overline{G_1} \cap G_2) = p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) + p(\overline{G_1}) \times p_{\overline{G_1}}(G_2) \\ &= 0,1 \times 0,8 + (1 - 0,1) \times 0,6 = 0,08 + 0,54 = 0,62. \end{aligned}$$

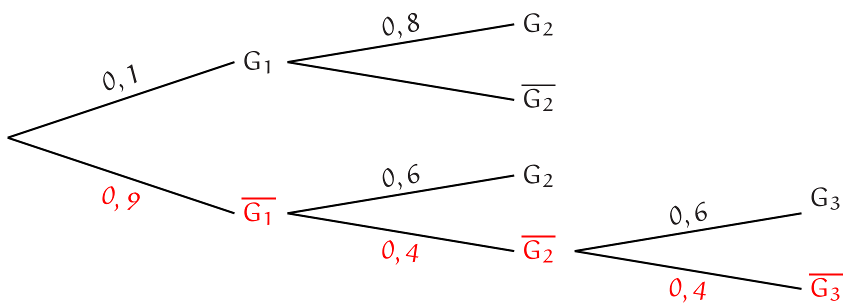
$$\boxed{p(G_2) = 0,62.}$$

2) La probabilité demandée est $p_{G_2}(\overline{G_1})$. Or

$$p_{G_2}(\overline{G_1}) = \frac{p(\overline{G_1} \cap G_2)}{p(G_2)} = \frac{p(\overline{G_1}) \times p_{\overline{G_1}}(G_2)}{p(G_2)} = \frac{(1 - 0,1) \times 0,6}{0,62} = \frac{0,54}{0,62} = \frac{54}{62} = \frac{27}{31}.$$

$$\boxed{p_{G_2}(\overline{G_1}) = \frac{27}{31}.}$$

3) On rajoute des branches à l'arbre du 1) :



L'événement « le joueur gagne au moins une des trois premières parties » est l'événement contraire de l'événement « le joueur ne gagne aucune des trois premières parties ». La probabilité que le joueur ne gagne aucune des trois premières parties est

$$p\left(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}\right) = 0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 0,144$$

et donc la probabilité que le joueur gagne au moins une des trois premières parties est $1 - 0,144 = 0,856$.

$$\boxed{\text{La probabilité que le joueur gagne au moins une des trois premières parties est } 0,856.}$$

4) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} = p(G_{n+1}) &= p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) = p(G_n) \times p_{G_n}(G_{n+1}) + p(\overline{G_n}) \times p_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \\ &= p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 = 0,2p_n + 0,6 = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}.}$$

5) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

- $\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{3}{4} - \frac{13}{20} = \frac{15}{20} - \frac{13}{20} = \frac{2}{20} = 0,1 = p_1$ et l'égalité est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$. Alors,

$$\begin{aligned}p_{n+1} &= \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + \frac{3}{5} = \frac{3}{20} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} + \frac{3}{5} = \frac{15}{20} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n.}$$

6) Puisque $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{4}.}$$

7) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7} &\Leftrightarrow \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n < 10^{-7} \Leftrightarrow \frac{13}{4} \times \frac{1}{5^n} < \frac{1}{10^7} \Leftrightarrow 5^n > \frac{13 \times 10^7}{4} \\ &\Leftrightarrow \ln(5^n) > \ln\left(3,25 \times 10^7\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n\ln(5) > \ln\left(3,25 \times 10^7\right) \Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(3,25 \times 10^7\right)}{\ln(5)} \text{ (car } \ln(5) > 0) \\ &\Leftrightarrow n > 10,7\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 11 \text{ (car } n \text{ est un entier).}\end{aligned}$$

Les entiers naturels non nuls n pour lesquels $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ sont les entiers supérieurs ou égaux à 11.

EXERCICE 3

PARTIE A : Restitution organisée de connaissances

Soient u et v deux fonction dérivables sur un intervalle $[a, b]$ telles que les fonctions u' et v' soient continues sur $[a, b]$. Alors, les fonctions $u'v$ et uv' sont définies et continues sur $[a, b]$ et il en est de même de la fonction $u'v + uv' = (uv)'$. Par suite, les trois intégrales $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$, $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\,dx$ existent. De plus,

$$\begin{aligned}\int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx &= \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)}\\ &= \int_a^b (uv)'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b \text{ (car } uv \text{ est une primitive de } (uv)' \text{ sur } [a,b])\\ &= u(b)v(b) - u(a)v(a),\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.}$$

On a démontré la formule d'intégration par parties.

PARTIE B

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln x = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

b) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif,

$$f'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

Sur $]0, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $2\ln x + 1$. Or,

$2\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{-1/2}$ (par stricte croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$) et de même,
$2\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1/2}$.

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $\left]0, e^{-1/2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[e^{-1/2}, +\infty\right[$.

2) Soit a un réel strictement positif. Une équation de la tangente (T_a) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ ou encore $y = f'(a)x+f(a)-af'(a)$. Cette tangente passe par O si et seulement si $f(a)-af'(a) = 0$. Puis,

$$\begin{aligned}f(a) - af'(a) = 0 &\Leftrightarrow a^2\ln a - a^2(2\ln a + 1) = 0 \Leftrightarrow a^2(-\ln a - 1) = 0 \Leftrightarrow -\ln a - 1 = 0 \text{ (car } a \neq 0)\\ &\Leftrightarrow \ln a = -1 \Leftrightarrow a = e^{-1}.\end{aligned}$$

De plus, une équation de $(T_{e^{-1}})$ est $y = f'\left(e^{-1}\right)x$ avec $f'\left(e^{-1}\right) = e^{-1}(2\ln(e^{-1})+1) = e^{-1}(2\times(-1)+1) = -\dfrac{1}{e}$. En résumé, une et une seule des tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ passe par O à savoir la tangente en son point d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ d'équation $y = -\dfrac{x}{e}$.

3) a) La fonction $g\ :\ x \mapsto \dfrac{x^5}{25}(5\ln x - 1)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif,

$$g'(x) = \frac{1}{25}\left(5x^4(5\ln x - 1) + x^5 \times \frac{5}{x}\right) = \frac{1}{25}(25x^4\ln x - 5x^4 + 5x^4) = x^4\ln x.$$

Donc la fonction $x \mapsto \dfrac{x^5}{25}(5\ln x - 1)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x^4\ln x$ sur $]0, +\infty[$.

b) On a $V = \displaystyle\int_{1/e}^1 \pi(x^2\ln x)^2\,dx = \pi\int_{1/e}^1 x^4\ln^2 x\,dx$. Calculons $I = \displaystyle\int_{1/e}^1 x^4\ln^2 x\,dx = \int_{1/e}^1 (\ln x) \times (x^4\ln x)\,dx$ par parties.

Pour x dans $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, posons $u(x) = \ln x$ et $v(x) = \frac{x^5}{25}(5\ln x - 1)$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x dans $[0, 1]$ on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln x & v(x) = \dfrac{x^5}{25}(5\ln x - 1) \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} & v'(x) = x^4 \ln x \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \int_{1/e}^{1} (\ln x) \times (x^4 \ln x)\, dx = \left[\ln x \times \frac{x^5}{25}(5\ln x - 1)\right]_{1/e}^{1} - \int_{1/e}^{1} \frac{1}{x} \times \frac{x^5}{25}(5\ln x - 1)\, dx \\
&= -\ln(e^{-1})\frac{1}{25e^5}(5\ln(e^{-1}) - 1) - \int_{1/e}^{1} \frac{x^4}{25}(5\ln x - 1)\, dx \text{ (car } \ln 1 = 0) \\
&= \frac{1}{25e^5}(-5 - 1) - \int_{1/e}^{1} \frac{x^4}{25}(5\ln x - 1)\, dx \text{ (car } \ln(e^{-1}) = -1) \\
&= -\frac{6}{25e^5} - \frac{1}{5}\int_{1/e}^{1} x^4 \ln x\, dx + \frac{1}{25}\int_{1/e}^{1} x^4\, dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= -\frac{6}{25e^5} - \frac{1}{5}\left[\frac{x^5}{25}(5\ln x - 1)\right]_{1/e}^{1} + \frac{1}{25}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{1/e}^{1} = -\frac{6}{25e^5} - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{25} + \frac{6}{25e^5}\right) + \frac{1}{125}\left(1 - \frac{1}{e^5}\right) \\
&= \frac{2}{125} + \frac{-30 - 6 - 1}{125e^5} = \frac{1}{125}\left(2 - \frac{37}{e^5}\right),
\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{V = \frac{\pi}{125}\left(2 - \frac{37}{e^5}\right).}$$

EXERCICE 4

Partie A

1) Puisque $1+2=3\neq 0$, le point K est bien défini. Dans le repère $\left(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$, le point D a pour coordonnées $(0,0,0)$ et le point F a pour coordonnées $(1,1,1)$ (car $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=1\,\overrightarrow{DA}+1\,\overrightarrow{DC}+1\,\overrightarrow{DH}$).

Donc les coordonnées du point K sont $\left(\dfrac{x_D+2x_F}{1+2}, \dfrac{y_D+2y_F}{1+2}, \dfrac{z_D+2z_F}{1+2}\right)$ ou encore $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

$$\boxed{\text{Les coordonnées du point K sont } \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right).}$$

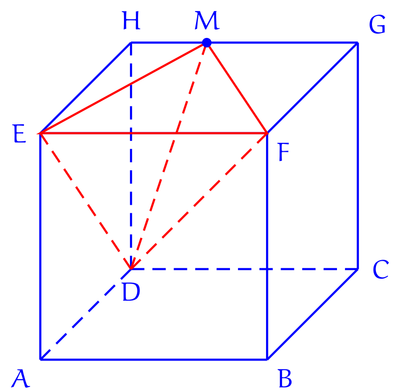
2) Dans le repère $\left(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$, le point E a pour coordonnées $(1,0,1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{EK}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $(1,1,1)$ puis

$$\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{DF}=\left(-\frac{1}{3}\right)\times 1+\frac{2}{3}\times 1+\left(-\frac{1}{3}\right)\times 1=0.$$

Donc, les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

3) $EK=\left\|\overrightarrow{EK}\right\|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{6}{9}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Partie B



1) Notons V le volume du tétraèdre EMFD. La projection orthogonale du point D sur le plan (EMF) est le point H. Donc

$$V=\frac{1}{3}\times DH\times \text{aire de (EMF)}=\frac{\text{aire de (EMF)}}{3}.$$

Ensuite, aire de (EMF) $=\dfrac{EF\times d(M,(EF))}{2}=\dfrac{EF\times HE}{2}=\dfrac{1}{2}$ et finalement $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$.

$$\boxed{V=\frac{1}{6}.}$$

2) Dans le repère $\left(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$, le point D a pour coordonnées $(0,0,0)$, le point F a pour coordonnées $(1,1,1)$ et le point M a pour coordonnées $(0,m,1)$.
Le vecteur $\overrightarrow{DM}$ a pour coordonnées $(0,m,1)$ et le vecteur $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $(1,1,1)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{DM}=k\overrightarrow{DF}$ alors nécessairement $0=k\times 1$ et aussi $1=k\times 1$ ce qui impose $k=0$ et aussi $k=1$. Ceci est impossible et donc les vecteurs $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DF}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points D, F et M ne sont pas alignés. Les points D, F et M définissent donc un unique plan.
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $(-1+m)x+y-mz=0$.

- $(-1+m)x_D+y_D-mz_D=(-1+m)\times 0+0-m\times 0=0+0+0=0$. Donc $D\in\mathscr{P}$.
- $(-1+m)x_M+y_M-mz_M=(-1+m)\times 0+m-m\times 1=0+m-m=0$. Donc $M\in\mathscr{P}$.
- $(-1+m)x_F+y_F-mz_F=(-1+m)\times 1+1-m\times 1=-1+m+1-m=0$. Donc $F\in\mathscr{P}$.

En résumé, les points D, M et F appartiennent à $\mathscr{P}$ ce qui montre que $\mathscr{P}$ est le plan (MFD) ou encore que

$$\boxed{\text{une équation cartésienne du plan (MFD) est } (-1+m)x+y-mz=0.}$$

3) a) Soit m un réel de $[0,1]$. Dans le repère $\left(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$, le point E a pour coordonnées $(1,0,1)$ et donc

$$d_m = \frac{|(-1+m)x_E + y_E - mz_E|}{\sqrt{(-1+m)^2 + 1^2 + (-m)^2}} = \frac{|(-1+m) + 0 - m|}{\sqrt{m^2 - 2m + 1 + 1 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}.$$

b) Soit $m \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} 2m^2 - 2m + 2 = 2(m^2 - m + 1) &= 2\left(\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = 2\left(\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) \\ &= 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Par suite, pour tout de $m \in [0,1]$, $2m^2 - 2m + 2 \geqslant \frac{3}{2}$ avec égalité si et seulement si $m = \frac{1}{2}$ puis $d_m \leqslant \frac{1}{\sqrt{3/2}}$ avec égalité si et seulement si $m = \frac{1}{2}$. En résumé, la distance d_m est maximale si et seulement si $m = \frac{1}{2}$ ou encore si et seulement si M est le milieu du segment $[HG]$.

$$\boxed{\text{La distance } d_m \text{ est maximale quand } M \text{ est le milieu de } [HG].}$$

c) Quand $m = \frac{1}{2}$, une équation du plan (MFD) est $-\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z = 0$ ou encore $x - 2y + z = 0$. Tout d'abord, $x_K - 2y_K + z_k = \frac{2}{3} - 2 \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$ et donc le point K appartient au plan (MFD).
Ensuite, un vecteur normal au plan (MFD) est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1,-2,1)$. D'autre part, d'après la question A.2), les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EK}$ sont $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Par suite, $\overrightarrow{EK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{n}$ et en particulier, $\overrightarrow{EK}$ est un vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{n}$ ou encore le vecteur $\overrightarrow{EK}$ est un vecteur normal au plan (MFD).
En résumé, le point K appartient au plan (MFD) et le vecteur $\overrightarrow{EK}$ est orthogonal au plan (MFD). On en déduit que

$$\boxed{\text{quand } d_m \text{ est maximale, le point } K \text{ est le projeté orthogonal du point } E \text{ sur le plan } (MFD).}$$