BACCALAUREAT GENERAL

Session de mars 2011
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
Nouvelle Calédonie

EXERCICE 1

Partie A : restitution organisée de connaissances

1) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$au(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = u'(x).$$

Donc la fonction u est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2) Puisque f et u sont dérivables sur $\mathbb{R}$, $f - u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow f' = af + b \\ &\Leftrightarrow f' = af + (u' - au) \text{ (car } u \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow f' - u' = af - au \Leftrightarrow (f-u)' = a(f-u) \\ &\Leftrightarrow f - u \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = ay \text{ sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3) D'après les questions 1) et 2) et le rappel de l'énoncé,

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \text{il existe un réel } K \text{ tel que pour tout réel } x,\ (f-u)(x) = Ke^{ax} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe un réel } K \text{ tel que pour tout réel } x,\ f(x) = u(x) + Ke^{ax} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe un réel } K \text{ tel que pour tout réel } x,\ f(x) = -\frac{b}{a} + Ke^{ax}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } (E) \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto -\frac{b}{a} + Ke^{ax},\ K \in \mathbb{R}.}$$

Partie B

1) La fonction v est dérivable sur $[0, +\infty[$ et solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle $10y' + y = 30$ ou encore $y' = -\frac{1}{10}y + 3$. D'après la partie A, il existe un réel K tel que pour tout réel positif t,

$$v(t) = -\frac{3}{-1/10} + Ke^{-\frac{1}{10}t} = 30 + Ke^{-\frac{1}{10}t}.$$

De plus,

$$v(0) = 0 \Leftrightarrow 30 + Ke^0 = 0 \Leftrightarrow K = -30.$$

Donc, pour tout réel positif t, $v(t) = 30 - 30e^{-\frac{1}{10}t} = 30\left(1 - e^{-\frac{1}{10}t}\right)$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t \geqslant 0,\ v(t) = 30\left(1 - e^{-\frac{1}{10}t}\right).}$$

2) a) La fonction v est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif t,

$$v'(t) = 30\left(-\left(-\frac{1}{10}\right)e^{-\frac{1}{10}t}\right) = 3e^{-\frac{1}{10}t}.$$

Pour tout réel positif t, on a $v'(t) > 0$ et donc

$$\boxed{\text{la fonction } v \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[.}$$

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{1}{10}t} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 30(1-0) = 30$.

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} v(t) = 30.}$$

3) Soit t un réel positif.

$$\begin{aligned}
v'(t) \leqslant 0,1 &\Leftrightarrow 3e^{-\frac{1}{10}t} \leqslant 0,1 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{10}t} \leqslant \frac{0,1}{3} \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{10}t} \leqslant \frac{1}{30} \\
&\Leftrightarrow \ln\left(e^{-\frac{1}{10}t}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{30}\right) \text{ (par croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{10}t \leqslant -\ln(30) \Leftrightarrow t \geqslant 10\ln(30).
\end{aligned}$$

Comme $10\ln(30) = 34,01\ldots$, la plus petite valeur à la seconde près à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée est 35 secondes.

$$\boxed{\text{A partir de 35 secondes à la seconde près, la vitesse du cycliste est stabilisée.}}$$

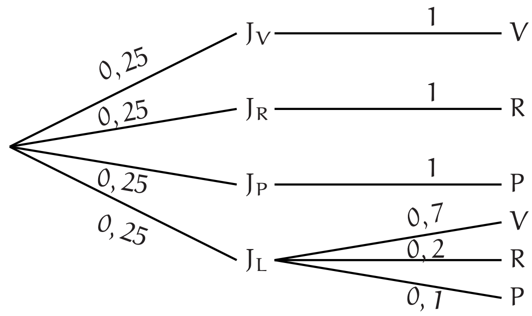
4) La distance demandée, exprimée en mètres est $\displaystyle\int_0^{35} v(t)\ dt$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{35} v(t)\ dt &= 30\int_0^{35} \left(1 - e^{-\frac{1}{10}t}\right) dt = 30\left[t + 10e^{-\frac{1}{10}t}\right]_0^{35} \\
&= 30\left(\left(35 + 10e^{-\frac{35}{10}}\right) - \left(0 + 10e^{0}\right)\right) = 30\left(25 + 10e^{-3,5}\right) = 759,05\ldots
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pendant les 35 premières secondes, le cycliste parcourt 759 mètres au mètre près.}}$$

EXERCICE 2

1) Représentons la situation par un arbre. On note J_V (respectivement J_R, J_P, J_L) l'événement « le concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre V (respectivement R, P, L) ». On note aussi V (respectivement R, P) l'événement « le concurrent effectue le parcours en vélo (respectivement en roller, à pied) ».



2) La probabilité demandée est $p(V)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(V) &= p(J_V \cap V) + p(J_R \cap V) + p(J_P \cap V) + p(J_L \cap V) \\ &= p(J_V) \times p_{J_V}(V) + p(J_R) \times p_{J_R}(V) + p(J_P) \times p_{J_P}(V) + p(J_L) \times p_{J_L}(V) \\ &= 0,25 \times 1 + 0,25 \times 0 + 0,25 \times 0 + 0,25 \times 0,7 = 0,25 + 0,25 \times 0,7 = 0,425. \end{aligned}$$

La probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo est $0,425$.

3) La probabilité demandée est $p_V(J_L)$.

$$p_V(J_L) = \frac{p(V \cap J_L)}{p(V)} = \frac{p(J_L) \times p_{J_L}(V)}{p(V)} = \frac{0,25 \times 0,7}{0,425} = \frac{0,175}{0,425} = \frac{175}{425} = \frac{7}{17}.$$

La probabilité qu'un concurrent tire le jeton L sachant qu'il effectue le trajet à vélo est $\frac{7}{17}$.

4) On note X le nombre de fois que le vainqueur est un « non cycliste ». Cette variable aléatoire suit un schéma de Bernoulli. En effet, on recommence 6 fois la même expérience de manière indépendante et à chaque expérience, on a deux éventualités « le vainqueur est un non cycliste » avec une probabilité $p = \frac{1}{3}$ et « le vainqueur est un cycliste » avec une probabilité $1 - p = \frac{2}{3}$.

La probabilité qu'au moins une fois le vainqueur soit un non cycliste est

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{6}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

La probabilité qu'au moins une fois le vainqueur soit un non cycliste est $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 0,91$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 3

PARTIE A

1) Soit x un réel.

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln(x^2+1) = x \Leftrightarrow \ln(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x^2+1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = x$ est $\mathscr{S} = \{0\}$.

2) La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

Pour tout réel x de $[0,1]$, on a $f'(x) \geqslant 0$ et donc la fonction f est croissante sur $[0,1]$. Soit alors x un réel. Puisque la fonction f est croissante sur $[0,1]$,

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) \Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 - \ln 2 \Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \text{ car } 1 - \ln 2 = 0,3\ldots$$

Pour tout réel x de $[0,1]$, $f(x)$ appartient à $[0,1]$.

PARTIE B

1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0,1]$.

• Puisque $u_0 = 1$, on a $u_0 \in [0,1]$ et donc l'encadrement est vrai quand $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \in [0,1]$. Alors, d'après la question 2) de la partie A, $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$.

On a montré par récurrence que

pour tout entier naturel n, $u_n \in [0,1]$.

2) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - \ln(u_n^2+1)) - u_n = -\ln(u_n^2+1).$$

Or, $u_n^2 + 1 \geqslant 1$ et donc $\ln(u_n^2+1) \geqslant 0$ puis $-\ln(u_n^2+1) \leqslant 0$ ou encore $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et donc

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Donc la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

Puisque pour tout entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$, quand n tend vers $+\infty$ on obtient $\ell = f(\ell)$ (par continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et donc en ℓ).
Ainsi, le réel ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$. D'après la question 1) de la partie A, on a donc $\ell = 0$.

La suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 4

1) a) Les cordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(3, 2, -2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(0, 2, 1)$. Donc

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3 \times 0 + 2 \times 2 + (-2) \times 1 = 2.$$

D'autre part,

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{17} \text{ et } AC = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2,\ AB = \sqrt{17} \text{ et } AC = \sqrt{5}.}$$

b) On sait que

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{2}{\sqrt{17} \times \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{85}}.$$

La calculatrice fournit alors

$$\boxed{\widehat{BAC} = 77 \text{ degrés au degré près.}}$$

c) En particulier, $\widehat{BAC} \neq 0°$ et $\widehat{BAC} \neq 180°$ et donc

$$\boxed{\text{les points A, B et C ne sont pas alignés.}}$$

2) Soit (P) le plan d'équation $2x - y + 2z + 2 = 0$.

- $2x_A - y_A + 2z_A + 2 = 2 \times (-2) - 0 + 2 \times 1 + 2 = -4 + 2 + 2 = 0$. Donc $A \in (P)$.
- $2x_B - y_B + 2z_B + 2 = 2 \times 1 - 2 + 2 \times (-1) + 2 = 2 - 2 - 2 + 2 = 0$. Donc $B \in (P)$.
- $2x_C - y_C + 2z_C + 2 = 2 \times (-2) - 2 + 2 \times 2 + 2 = -4 - 2 + 4 + 2 = 0$. Donc $C \in (P)$.

Donc, les points A, B et C appartiennent au plan (P). D'après la question 1)c), les points A, B et C ne sont pas alignés et donc ces trois points définissent un unique plan. On en déduit que le plan (ABC) est le plan (P) ou encore que

$$\boxed{\text{une équation cartésienne du plan (ABC) est } 2x - y + 2z + 2 = 0.}$$

3) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y - 3z + 3 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y = 3z - 3 \\ x - 2y = -6z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -y + 3z - 3 \\ (-y + 3z - 3) - 2y = -6z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3y = -9z + 3 \\ x = -y + 3z - 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -1 + 3z \\ x = -(-1 + 3z) + 3z - 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = -1 + 3z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{array}\right. .$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Les plans } P_1 \text{ et } P_2 \text{ sont sécants suivant la droite D dont un système d'équations paramétriques est} \\ \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}. \end{array}}$$

4) Soit $M(-2, -1 + 3t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de D.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 2(-2) - (-1 + 3t) + 2(t) + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Quand $t = -1$, on obtient le point de coordonnées $(-2, -4, -1)$ et on a montré que

$$\boxed{\text{la droite D et le plan (ABC) sont sécants en le point de coordonnées } (-2, -4, -1).}$$

5) a) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in S \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - (-3))^2 + (z - 1)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 9.$$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de la sphère S est } (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 9.}$$

b) Soit $M(-2, -1+3t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de D.

$$\begin{aligned} M \in S &\Leftrightarrow (-2-1)^2 + (-1+3t+3)^2 + (t-1)^2 = 9 \Leftrightarrow (3t+2)^2 + (t-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (3t+2)^2 = (t-1)^2 = 0 \text{ (car } (3t+2)^2 \text{ et } (t-1)^2 \text{ sont deux réels positifs)} \\ &\Leftrightarrow t = -\frac{2}{3} \text{ et } t = 1. \end{aligned}$$

Il est impossible que t soit égal simultanément à 1 et $-\frac{2}{3}$ et donc

$$\boxed{\text{l'intersection de la sphère } S \text{ et de la droite } D \text{ est vide.}}$$

c) La distance du centre Ω de S au plan (ABC) est

$$d = \frac{|2 \times 1 - (-3) + 2 \times 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3.$$

Ainsi, la distance d du centre Ω de la sphère S au plan (ABC) est égale à r le rayon de la sphère S et donc

$$\boxed{\text{le plan } (ABC) \text{ est tangent à la sphère } S.}$$