BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011

MATHEMATIQUES

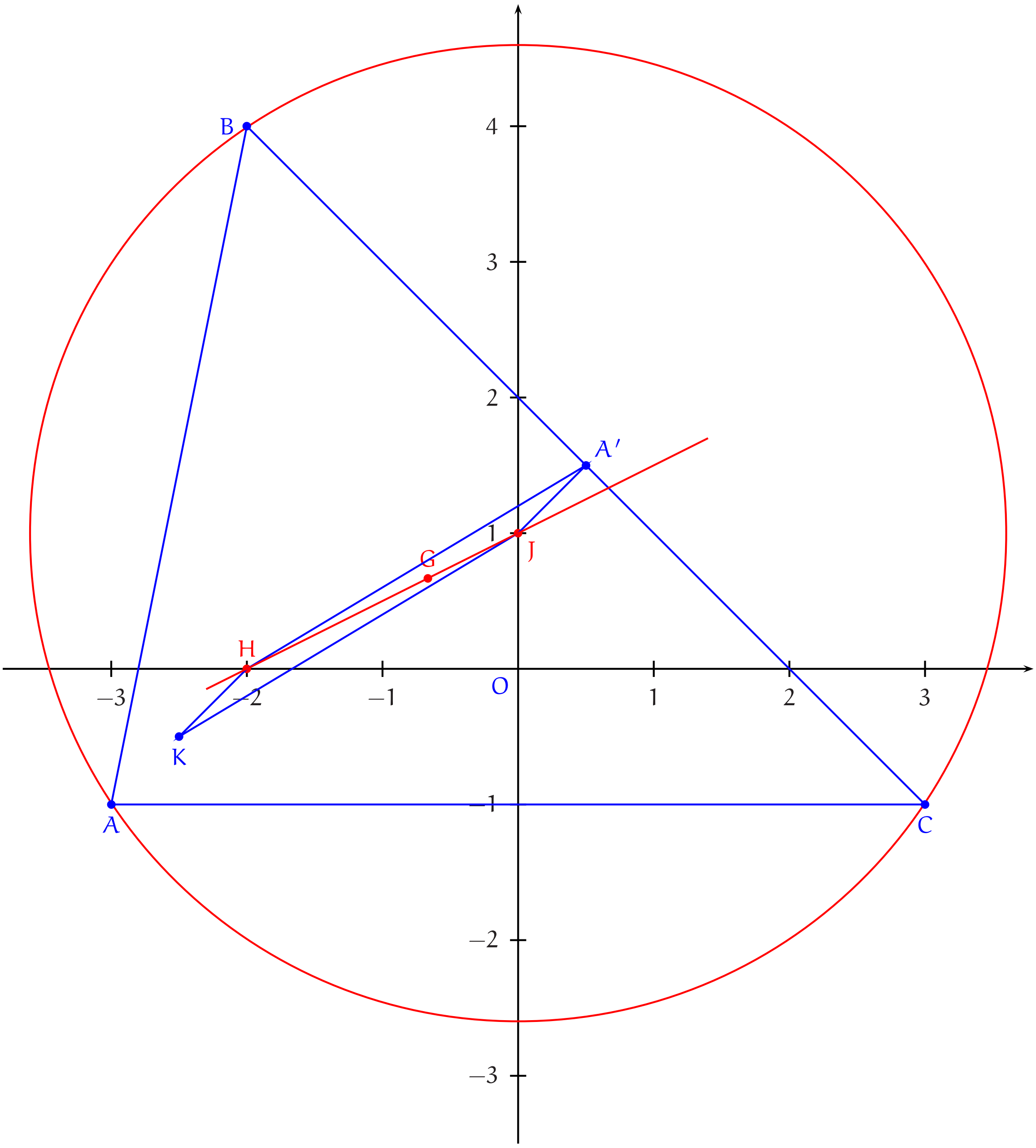
- Série S -

Enseignement Obligatoire

AntillesGuyane

EXERCICE 1

1) Figure.



2) • $JA = |a - i| = |-3 - i - i| = |-3 - 2i| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.
• $JB = |b - i| = |-2 + 4i - i| = |-2 + 3i| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.
• $JC = |c - i| = |3 - i - i| = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

En résumé, $JA = JB = JC = \sqrt{13}$ et donc

le point J est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC dont le rayon est $\sqrt{13}$.

3) $\dfrac{b-c}{h-a} = \dfrac{(-2+4i)-(3-i)}{-2-(-3-i)} = \dfrac{-5+5i}{1+i} = \dfrac{5i(1+i)}{1+i} = 5i$. En particulier,

$$\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{h-a}\right) = \arg(5i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi],$$

ou encore,

$$\boxed{\text{les droites } (AH) \text{ et } (BC) \text{ sont perpendiculaires.}}$$

4) Le centre de gravité du triangle ABC est l'isobarycentre des points A, B et C. Donc

$$g = \frac{a+b+c}{3} = \frac{-3-i-2+4i+3-i}{3} = -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i.$$

5) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{JG}$ est $g-i = -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i-i = -\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{JH}$ est $h-i = -2-i$.
Donc $h-i = 3(g-i)$ ou encore $\overrightarrow{JH} = 3\overrightarrow{JG}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{JH}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont colinéaires ou encore les points G, J et H sont alignés.

6) a) On note k l'affixe du point K.

$$k = \frac{a+h}{2} = \frac{-3-i-2}{2} = -\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i.$$

$$\boxed{\text{L'affixe du point } K \text{ est } -\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i.}$$

b) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{HA'}$ est $a'-h = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}i-(-2) = \frac{5}{2}+\frac{3}{2}i$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{KJ}$ est $i-k = i-\left(-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i\right) = \frac{5}{2}+\frac{3}{2}i$.
Ainsi, $a'-h = i-k$ ou encore $\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{KJ}$ et par suite,

$$\boxed{\text{le quadrilatère } KHA'J \text{ est un parallélogramme.}}$$

EXERCICE 2

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (xe^x - 1) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (x+1)e^x.$$

Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $e^x > 0$ et $x+1 > 0$. Donc, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $f'(x) > 0$.
On en déduit le tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	-1	$+\infty$

b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Donc pour tout réel k de $\left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= [-1, +\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. En particulier, puisque 0 appartient à $[-1, +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. On note α cette solution.

La calculatrice fournit $f(0,56) = -0,01\ldots < 0$ et $f(0,57) = 0,007\ldots > 0$. Donc $f(0,56) < f(\alpha) < f(0,57)$ et, puisque la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que $0,56 < \alpha < 0,57$. Par suite,

$$\boxed{\alpha = 0,56 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par défaut.}}$$

c) Soit $x \geqslant 0$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, si $0 \leqslant x < \alpha$, alors $f(x) < f(\alpha)$ ou encore $f(x) < 0$ et si $x > \alpha$, alors $f(x) > f(\alpha)$ ou encore $f(x) > 0$. Ainsi, la fonction f est strictement négative sur $[0, \alpha[$, strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$ et enfin, la fonction f s'annule en α.

2) a) Pour $x > 0$, posons $g(x) = MN = e^x - \ln x$. La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x} = \frac{f(x)}{x}.$$

Sur $]0, +\infty[$, $g'(x)$ est du signe de $f(x)$. D'après la question 1)c), la fonction g' est strictement négative sur $[0, \alpha[$ puis strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$. On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $[0, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$ puis que la fonction g admet un minimum en α. On a montré que la distance MN est minimale lorsque $x = \alpha$.

La calculatrice fournit encore $f(0,567) < 0$ et $f(0,568) > 0$. Donc, $0,567 < \alpha < 0,568$ puis

$$e^{0,567} - \ln(0,568) < e^\alpha - \ln\alpha < e^{0,568} - \ln(0,567)$$

ou encore $2,328\ldots < e^\alpha - \ln\alpha < 2,332\ldots$ Par suite, $e^\alpha - \ln\alpha = 2,33$ à 10^{-2} près.

$$\boxed{MN_{min} = 2,33 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

b) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha = 1 \Leftrightarrow e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.

La dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$ est la fonction $x \mapsto e^x$. Donc, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α est e^α.
La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln x$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Donc, le coefficient directeur de la tangente à Γ au point d'abscisse α est $\dfrac{1}{\alpha}$.
Puisque $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$, ces coefficients directeurs sont égaux ou encore

$$\boxed{\text{les tangentes à } \mathscr{C} \text{ et } \Gamma \text{ en leur point d'abscisse } \alpha \text{ sont parallèles.}}$$

3) a) La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $h'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.
Donc,

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est une primitive de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

b) On note $\mathscr{A}$ l'aire à calculer. Sur le segment $[1,2]$, les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln x$ sont continues et de plus, pour x réel de $[1,2]$, on a $e^x > \ln x$. Donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_1^2 (e^x - \ln x)\, dx = [e^x - (x\ln x - x)]_1^2 = [e^x - x\ln x + x]_1^2 \\ &= (e^2 - 2\ln 2 + 2) - (e^1 - \ln 1 + 1) = e^2 - e + 1 - 2\ln 2.\end{aligned}$$

$\boxed{\mathscr{A} = e^2 - e + 1 - 2\ln 2 = 4,28 \text{ unités d'aire à } 10^{-2} \text{ unité d'aire près.}}$

EXERCICE 3

1. réponse b)

2. réponse b)

3. réponse a)

4. réponse a)

Explication 1. On note X le nombre de fois où le tireur atteint la cible en n tentatives. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le tireur atteint la cible » avec une probabilité $p = 0,3$ ou « le tireur n'atteint pas la cible » avec une probabilité $1 - p = 0,7$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,3$.

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$. Or,

$$p_n = p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}(0,3)^0(0,7)^n = 1 - (0,7)^n,$$

puis

$$\begin{aligned}
p_n \geqslant 0,9 &\Leftrightarrow 1 - (0,7)^n \geqslant 0,9 \Leftrightarrow (0,7)^n \leqslant 0,1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{10}\right)^n \leqslant \frac{1}{10} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{10}{7}\right)^n \geqslant 10 \text{ (car la fonction inverse est décroissante sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{10}{7}\right)^n\right) \geqslant \ln(10) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{10}{7}\right) \geqslant \ln(10) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(10)}{\ln\left(\frac{10}{7}\right)} \text{ (car } \frac{10}{7} > 1 \text{ et donc } \ln\left(\frac{10}{7}\right) > 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 6,4\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 7 \text{ (car } n \text{ est entier).}
\end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse b).

Explication 2. La probabilité demandée est $p(X \geqslant 10000)$.

$$\begin{aligned}
p(X \geqslant 10000) &= 1 - p(X \leqslant 10000) = 1 - \int_0^{10000} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{10000} = 1 - \left(1 - e^{-0,0002\times 10000}\right) \\
&= e^{-2} = 0,135 \text{ au millième près.}
\end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse b).

Explication 3. On note X le nombre de fois où le joueur perd en 5 lancers. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le joueur perd » avec une probabilité $p = \frac{1}{6}$ ou « le joueur gagne » avec une probabilité $1 - p = \frac{5}{6}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{6}$.

La probabilité demandée est $p(X = 3)$. Or,

$$p(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5\times 4\times 3}{3\times 2}\times\frac{5^2}{6^5} = \frac{10\times 5^2}{6^5} = \frac{5^3}{3\times 6^4} = \frac{125}{3888}.$$

La bonne réponse est la réponse a).

Explication 4. Puisque les événements A et B sont indépendants, $p(A\cap B) = p(A)\times p(B) = 0,3\,p(B)$. Ensuite,

$$p(A) + p(B) - P(A\cap B) = p(A\cup B) \Rightarrow 0,3 + p(B) - 0,3\,p(B) = 0,65 \Rightarrow 0,7\,p(B) = 0,35 \Rightarrow p(B) = \frac{0,35}{0,7} \Rightarrow p(B) = 0,5.$$

La bonne réponse est la réponse a).

EXERCICE 4

1) Un vecteur directeur de D' est le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(-1, 1, -1)$.
Un vecteur directeur de Δ est un vecteur orthogonal aux droites D et D' ou encore aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Or,

$$\overrightarrow{w}.\overrightarrow{u} = 1 \times 1 + 0 \times (-3) + (-1) \times 1 = 1 - 1 = 0,$$

et

$$\overrightarrow{w}.\overrightarrow{v} = 1 \times (-1) + 0 \times 1 + (-1) \times (-1) = -1 + 1 = 0.$$

Ainsi, $\overrightarrow{w}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ou encore

$\boxed{\overrightarrow{w} \text{ est un vecteur directeur de } \Delta.}$

2) a) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan P. Or

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = 3 \times 1 + 2 \times (-3) + 3 \times 1 = 3 - 6 + 3 = 0 \text{ et } \overrightarrow{n}.\overrightarrow{w} = 3 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times (-1) = 3 - 3 = 0.$$

Comme le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan P, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan P.

b) Le plan P est le plan contenant le point $A(3, -4, 1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(3, 2, 3)$. Une équation cartésienne de P est donc $3(x-3) + 2(y+4) + 3(z-1) = 0$ ou encore $3x + 2y + 3z - 4 = 0$.

$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } P \text{ est } 3x + 2y + 3z - 4 = 0.}$

3) a) H' est un point de D'. Donc il existe un réel t tel que les coordonnées de H' soient $(-1-t, 2+t, 1-t)$. H' est aussi un point de Δ et donc de P. Or

$$H' \in P \Leftrightarrow 3(-1-t) + 2(2+t) + 3(1-t) - 4 = 0 \Leftrightarrow -4t = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Quand $t = 0$, on obtient les coordonnées du point H' à savoir $(-1, 2, 1)$.

$\boxed{\text{Le point } H' \text{ a pour coordonnées } (-1, 2, 1).}$

b) Δ est la droite passant par $H'(-1, 2, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}(1, 0, -1)$. Une représentation paramétrique de Δ est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = 1 - t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

4) a) H est un point de Δ. Donc il existe un réel t tel que les coordonnées de H soient $(-1+t, 2, 1-t)$. Le point H est aussi sur D et donc le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AH}$ sont $(-4+t, 6, -t)$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AH} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{u} &\Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{u} \\
&\Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} -4 + t = k \\ 6 = -3k \\ -t = k \end{array}\right. \Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} k = -2 \\ -4 + t = -2 \\ -t = -2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} k = -2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 2.
\end{aligned}$$

Quand $t = 2$, on obtient les coordonnées du point H à savoir $(1, 2, -1)$.

$\boxed{\text{Le point } H \text{ a pour coordonnées } (1, 2, -1).}$

b) $HH' = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$\boxed{HH' = 2\sqrt{2}.}$

5) a) Soient M un point de D et M' un point de D'.

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'} = \overrightarrow{HH'} + \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right).$$

De plus, $\overrightarrow{HH'}$ est un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{MH}$ est un vecteur de D. Donc $\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{MH} = 0$. De même, $\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'M'} = 0$ et finalement

$$\overrightarrow{HH'}.\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right) = \overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'M'} = 0 + 0 = 0.$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{HH'}$.

b) Soient M un point de D et M' un point de D'.

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|^2 &= \left(\overrightarrow{HH'} + \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right)\right)^2 = \left\|\overrightarrow{HH'}\right\|^2 + 2\overrightarrow{HH'}.\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right) + \left\|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right\|^2 \\ &= \left\|\overrightarrow{HH'}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right\|^2 \\ &\geqslant \left\|\overrightarrow{HH'}\right\|^2,\end{aligned}$$

puis $MM'^2 \geqslant HH'^2$ et donc $MM' \geqslant HH'$.

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ de } D \text{ et tout point } M' \text{ de } D',\ MM' \geqslant HH'.}$$

