BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Pondichery

EXERCICE 1

Partie A - Restitution organisée de connaissances :

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ telles que pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leqslant g(t)$. Alors, pour tout réel t de $[a, b]$, $g(t) - f(t) \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_a^b (g(t) - f(t))\ dt \geqslant 0$ puis par linéarité de l'intégrale, on en déduit que $\int_a^b g(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt \geqslant 0$ et donc que $\int_a^b f(t)\ dt \leqslant \int_a^b g(t)\ dt$.

Partie B

1. a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty.}$$

b. 1ère solution. La fonction $x \mapsto 1 + x$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et la fonction $y \mapsto \ln(y)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Donc la fonction $f_1 \ :\ x \mapsto \ln(1 + x)$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2ème solution. Pour tout réel x de $[0, +\infty[$, on a $1 + x > 0$. Donc, la fonction f_1 est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel x de $[0, +\infty[$,

$$f_1'(x) = \frac{1}{1 + x} > 0.$$

Donc

$$\boxed{\text{la fonction } f_1 \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[.}$$

c. 1ère solution. Pour x dans $[0, 1]$, posons $u(x) = \ln(1 + x)$ et $v(x) = x$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x dans $[0, 1]$ on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln(1 + x) & v(x) = x \\ u'(x) = \dfrac{1}{1 + x} & v'(x) = 1 \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_1(x)\ dx &= \int_0^1 1 \times \ln(x + 1)\ dx = [x \ln(x + 1)]_0^1 - \int_0^1 x \times \frac{1}{x + 1}\ dx = \ln 2 - 0 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x + 1}\right) dx \\ &= \ln 2 - [x - \ln(x + 1)]_0^1 = \ln 2 - (1 - \ln 2 - 0) = 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

2ème solution. Pour x dans $[0, 1]$, posons $u(x) = \ln(1 + x)$ et $v(x) = x + 1$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x dans $[0, 1]$ on a

$$u(x) = \ln(1+x) \qquad v(x) = x+1$$

$$u'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad v'(x) = 1$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\ dx &= \int_0^1 1\times\ln(1+x)\ dx = [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 (x+1)\times\frac{1}{x+1}\ dx = 2\ln 2 - 0 - \int_0^1 1\ dx \\ &= 2\ln 2 - 1.\end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = 2\ln 2 - 1.}$$

Pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x+1 \geqslant 1$ et donc $f_1(x) = \ln(x+1) \geqslant 0$. Ainsi, la fonction f_1 est continue et positive sur $[0,1]$. On sait alors que le nombre I_1 est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$, l'axe des abscisses et la courbe C_1.

2. a. Soit n un entier naturel non nul. Pour tout x de $[0,1]$, on a $1 \leqslant 1+x^n \leqslant 2$ et donc $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant \ln 2$ par croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$.

Par positivité et croissance de l'intégrale, on en déduit $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\ dx \leqslant \int_0^1 \ln 2\ dx$ avec $\displaystyle\int_0^1 \ln 2\ dx = (1-0)\times\ln 2 = \ln 2$.

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2.}$$

b. Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x \leqslant 1$ puis $x^{n+1} \leqslant x^n$ après multiplication des deux membres de l'inégalité par le réel positif x^n.
Par suite, pour tout réel x de $[0,1]$, $1+x^{n+1} \leqslant 1+x^n$ puis $\ln(1+x^{n+1}) \leqslant \ln(1+x^n)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^{n+1})\ dx \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\ dx$ et donc que $I_{n+1} \leqslant I_n$.

On a montré que pour tout entier naturel non nul, $I_{n+1} \leqslant I_n$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est décroissante.}}$$

c. La suite (I_n) est décroissante d'après b) et minorée par 0 d'après a). Donc

$$\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est convergente.}}$$

3. a. La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1} \leqslant 0.$$

Donc

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est décroissante sur } [0,+\infty[.}$$

b. La fonction g est décroissante sur $[0,+\infty[$. Par suite, pour tout $x \geqslant 0$, on a $g(x) \leqslant g(0)$ ou encore $g(x) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est négative sur } [0,+\infty[.}$$

On en déduit que pour tout réel t de $[0,+\infty[$, $\ln(1+t) - t \leqslant 0$ ou encore $\ln(1+t) \leqslant t$. Soient alors n un entier naturel non nul et x un réel positif. Le réel $t = x^n$ est encore un réel positif et d'après ce qui précède, on a $\ln(1+x^n) \leqslant x^n$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n \text{ et tout réel positif } x,\ \ln(1+x^n) \leqslant x^n.}$$

c. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)\ dx \leqslant \int_0^1 x^n\ dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

EXERCICE 2

Partie A

1. $a^2 = b^3 \Rightarrow (du)^2 = (dv)^3 \Rightarrow d^2u^2 = d^3v^3 \Rightarrow u^2 = dv^3$.

2. Puisque d est le PGCD de a et b, on sait que u et v sont premiers entre eux. L'entier v divise $dv^3 = u^2 = u \times u$ et l'entier v est premier à u. Le théorème de Gauss permet alors d'affirmer que v divise u. Par suite, le PGCD de u et v est v. Comme ce PGCD est aussi 1, on a donc $v = 1$.

3. Si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier, il existe un entier strictement positif n tel que $a = n^3$ et $b = n^2$. Mais alors $a^2 = n^6 = b^3$.

Réciproquement, si $a^2 = b^3$, alors d'après la question 2., il existe deux entiers strictement positifs d et u tel que $a = du$ et $b = d$. L'égalité $a^2 = b^3$ fournit $d^2u^2 = d^3$ et donc $d = u^2$. Par suite, $a = u^3$ et $b = u^2$ ou encore a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

On a montré que $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont le cube et le carré d'un même entier.

4. Tout entier a est congru modulo 7 à l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 ou aussi à l'un des entiers -3, -2, -1, 0, 1, 2 ou 3. De plus, $0^2 \equiv 0$ [7]. $1^2 \equiv 1$ [7]. $2^2 \equiv 4$ [7]. $3^2 \equiv 2$ [7], $(-1)^2 \equiv 1$ [7], $(-2)^2 \equiv 4$ [7] et $(-3)^2 \equiv 2$ [7].
En résumé, pour tout entier strictement positif a, on a $a^2 \equiv 0$ [7] ou $a^2 \equiv 1$ [7] ou $a^2 \equiv 2$ [7] ou $a^2 \equiv 4$ [7].

De même, $0^3 \equiv 0$ [7]. $1^3 \equiv 1$ [7]. $2^3 \equiv 1$ [7]. $3^3 \equiv 6$ [7], $(-1)^3 \equiv 6$ [7], $(-2)^3 \equiv 6$ [7] et $(-3)^3 \equiv 1$ [7] et donc pour tout entier strictement positif b, on a $b^3 \equiv 0$ [7] ou $b^3 \equiv 1$ [7] ou $b^3 \equiv 6$ [7].

Si de plus, $a^2 = b^3 = n$, alors on a nécessairement $n \equiv 0$ [7] ou $n \equiv 1$ [7].

Partie B

1. Si $\lambda < 0$, alors $\lambda^3 < 0$ et l'équation $x^2y^2 = \lambda^3$ n'a pas de solution. Ceci correspond au graphique 2.

Si $\lambda = 0$, $x^2y^2 = \lambda^3 \Leftrightarrow x^2y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$. La section de S par le plan d'équation $z = 0$ est donc la réunion des deux droites (Ox) et (Oy). Ceci correspond au graphique 1.

Si $\lambda > 0$, $x^2y^2 = \lambda^3 \Leftrightarrow xy = \lambda^{3/2}$ ou $xy = -\lambda^{3/2} \Leftrightarrow y = \dfrac{\lambda^{3/2}}{x}$ ou $y = -\dfrac{\lambda^{3/2}}{x}$. On obtient ainsi une réunion de deux hyperboles. Ceci correspond au graphique 3.

2. a. Soient x et y deux entiers strictement positifs. $x^2y^2 = 25^3 \Leftrightarrow (xy)^2 = 5^6 \Leftrightarrow xy = 5^3 \Leftrightarrow (x = 1$ et $y = 5^3)$ ou $(x = 5$ et $y = 5^2)$ ou $(x = 5^2$ et $y = 5)$ ou $(x = 5^3$ et $y = 1)$. C_{25} contient donc quatre points dont les coordonnées sont des entiers strictement positifs à savoir les points de coordonnées $(1, 125, 25)$, $(5, 25, 25)$, $(25, 5, 125)$ et $(125, 1, 25)$.

$\boxed{C_{25} \text{ contient quatre points dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.}}$

b. Soient x et y deux entiers strictement positifs. $x^2y^2 = 2010^3 \Leftrightarrow xy = \sqrt{2010^3} = 90114,3\ldots$ Le problème n'a donc pas de solution ou encore

$\boxed{C_{2010} \text{ ne contient aucun point dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.}}$

EXERCICE 3

1. a. $X = -1$ correspond à l'événement « le joueur tire une boule blanche et une boule rouge ». L'urne contient $n + 10$ boules. Il y a donc $(n + 10)(n + 9)$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne.
Ensuite, il y a $10 \times n$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que la première boule tirée est blanche et la deuxième est rouge et il y a $n \times 10$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que la première boule tirée est rouge et la deuxième est blanche. Finalement, il y a $10n + 10n = 20n$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que l'une des deux boules est blanche et l'autre est rouge et donc

$$\boxed{P(X = -1) = \frac{20n}{(n + 10)(n + 9)}.}$$

b. Les deux autres valeurs prises par la variable X sont 4 dans le cas où le joueur tire deux boules rouges et -6 dans le cas où le joueur tire deux boules blanches. Il y a 10×9 tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que les deux boules soient blanches et donc $p(X = 4) = \dfrac{10 \times 9}{(n + 10)(n + 9)}$. De même, il y a $n(n - 1)$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que les deux boules soient rouges et donc $p(X = -6) = \dfrac{n(n - 1)}{(n + 10)(n + 9)}$.

$$\boxed{P(X = -6) = \frac{n(n - 1)}{(n + 10)(n + 9)},\ P(X = -1) = \frac{20n}{(n + 10)(n + 9)} \text{ et } P(X = 4) = \frac{90}{(n + 10)(n + 9)}.}$$

c.

$$\begin{aligned}
E(X) &= (-6) \times p(X = -6) + (-1) \times p(X = -1) + 4 \times p(X = 4) \\
&= -6\frac{n(n - 1)}{(n + 10)(n + 9)} - \frac{20n}{(n + 10)(n + 9)} + 4\frac{90}{(n + 10)(n + 9)} \\
&= \frac{-6n(n - 1) - 20n + 360}{(n + 10)(n + 9)} = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n + 10)(n + 9)}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n + 10)(n + 9)}.}$$

d.

$$E(X) > 0 \Leftrightarrow \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n + 10)(n + 9)} > 0 \Leftrightarrow -6n^2 - 14n + 360 > 0 \Leftrightarrow n^2 + \frac{7}{3}n - 60 < 0$$

Maintenant, le discriminant du trinôme $x^2 + \dfrac{7}{3}x - 60$ est $\Delta = \dfrac{49}{9} + 240 = \dfrac{2209}{9} > 0$. Ce trinôme admet deux racines réelles à savoir $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{7}{3} - \dfrac{\sqrt{2209}}{3}\right) = \dfrac{-7 - 47}{6} = -9 < 0$ et $x_2 = \dfrac{-7 + \sqrt{2209}}{6} = \dfrac{20}{3} = 6,6\ldots$.

On sait que $x^2 + \dfrac{7}{3}x - 60 < 0 \Leftrightarrow x \in]x_1, x_2[$. Mais alors, puisque n est un entier naturel supérieur ou égal à 2,

$$E(X) > 0 \Leftrightarrow n \in]x_1, x_2[\Leftrightarrow n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$\boxed{\text{Les valeurs de } n \text{ pour lesquelles } E(X) > 0 \text{ sont 2, 3, 4, 5 et 6.}}$$

2. Notons Y le nombre de boules rouges obtenues sur 20 tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne. Y suit un schéma de Bernoulli. En effet,

• une même expérience (à savoir tirer une boule de l'urne) à deux éventualités (obtenir une boule rouge ou ne pas obtenir une boule rouge) est effectuée 20 fois de manière indépendante puisque la boule est remise dans l'urne à chaque tirage
• à chaque expérience, la probabilité de tirer une boule rouge est $p = \dfrac{n}{n + 10}$ et la probabilité de ne pas tirer une boule rouge est $1 - p = \dfrac{10}{n + 10}$.

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est $p(Y \geqslant 1)$ avec

$$p(Y \geqslant 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \binom{20}{0}\left(\frac{n}{n+10}\right)^0\left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} = 1 - \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
p(Y \geqslant 1) > 0,999 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} > 0,999 \Leftrightarrow \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} < 0,001 \Leftrightarrow \frac{10}{n+10} < \sqrt[20]{0,001} \Leftrightarrow \frac{n+10}{10} > \frac{1}{\sqrt[20]{0,001}} \\
&\Leftrightarrow n + 10 > \frac{10}{\sqrt[20]{0,001}} \Leftrightarrow n > \frac{10}{\sqrt[20]{0,001}} - 10 \\
&\Leftrightarrow n > 4,1\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 5 \text{ (car } n \text{ est entier)}.
\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est strictement supérieure à $0,999$ si et seulement si $n \geqslant 5$.

3. a. Soit k un entier naturel.

$$p(Z \leqslant k) = \int_0^k 0,01e^{-0,01x}\,dx = \left[0,01 \times \frac{e^{-0,01x}}{-0,01}\right]_0^k = \left[-e^{-0,01x}\right]_0^k = -e^{-0,01k} - (-e^0) = 1 - e^{-0,01k}.$$

Pour $k = 50$, on obtient $p(Z \leqslant 50) = 1 - e^{-0,01\times 50} = 1 - e^{-0,5} = 0,39$ arrondi au centième.

b. La probabilité de mandée est $p(Z \leqslant 60)_{Z>50}$. Or

$$\begin{aligned}
p_{Z>50}(Z \leqslant 60) &= \frac{p((Z \geqslant 60) \cap (Z > 50))}{p(Z > 50)} = \frac{p(50 < Z \leqslant 60)}{p(Z > 50)} = \frac{p(Z \leqslant 60) - p(Z \leqslant 50)}{1 - p(Z \leqslant 50)} \\
&= \frac{(1 - e^{-0,6}) - (1 - e^{-0,5})}{1 - (1 - e^{-0,5})} = \frac{e^{-0,5} - e^{-0,6}}{e^{-0,5}} = 1 - e^{-0,1} \\
&= 0,095 \text{ arrondi au millième.}
\end{aligned}$$

EXERCICE 4

1. • $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$.

• $u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = -\frac{5}{9} - 1 = -\frac{14}{9}$.

• $u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = -\frac{14}{27}$.

$$\boxed{u_1 = -\frac{5}{3},\ u_2 = -\frac{14}{9} \text{ et } u_3 = -\frac{14}{27}.}$$

2. **a.** Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

• $u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = -\frac{14}{81} + 1 = \frac{67}{81} \geqslant 0$. L'inégalité est donc vraie quand $n = 4$.

• Soit $n \geqslant 4$. Supposons que $u_n \geqslant 0$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \geqslant \frac{1}{3} \times 0 + 4 - 2 \geqslant 0.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 4,\ u_n \geqslant 0.}$$

b. Soit $n \geqslant 5$.

$$u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + (n-1) - 2 = \frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3 \geqslant n - 3.$$

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 5,\ u_n \geqslant n - 3.}$$

c. Puisque $\lim_{n\to+\infty}(n-3) = +\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

3. **a.** On a déjà $v_0 = -2u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = -2 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$. Soit alors n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n - \frac{15}{2} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} \\ &= \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) = \frac{1}{3}v_n. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est la suite géométrique de premier terme } v_0 = -\frac{25}{2} \text{ et de raison } q = \frac{1}{3}.}$$

b. Soit n un entier naturel. D'après la question a), $v_n = v_0 q^n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ puis

$$u_n = -\frac{1}{2}\left(v_n - 3n + \frac{21}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3n + \frac{21}{2}\right) = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.}$$

c. Soit n un entier naturel.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \left(\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \frac{3}{2}\times 0 - \frac{21}{4}\right) + \left(\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \frac{3}{2}\times 1 - \frac{21}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}\times n - \frac{21}{4}\right)\\
&= \frac{25}{4}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + \frac{3}{2}(0+1+\ldots+n) - \frac{21}{4}(n+1)\\
&= \frac{25}{4}\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}\times\frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1) = \frac{25}{4}\times\frac{3}{2}\times\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{4}n - \frac{21}{4}n - \frac{21}{4}\\
&= \frac{3}{4}n^2 - \frac{9}{2}n + \frac{33}{8} - \frac{75}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{3}{4}n^2 - \frac{9}{2}n + \frac{33}{8} - \frac{25}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ S_n = \frac{3}{4}n^2 - \frac{9}{2}n + \frac{33}{8} - \frac{25}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n.}$$

