BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2010

SUJET SORTI

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 : (6 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1) Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2) On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E').

3) Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').

4) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

5) Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B :

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f_k(x) = (x+k)e^{-x}$ où k est un nombre réel donné.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1) Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1 - k$.

2) On note M_k le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1-k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.

3) Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :
   - la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$;
   - la courbe $\mathscr{C}_k$ d'équation $y = (x+k)e^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.

   a) Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).

   b) En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.

4) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^2 (x+2)e^{-x}dx$. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

EXERCICE 2 : (5 points)

Commun à tous les candidats

1) Restitution organisée de connaissances.

Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.

Propriété 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant u_n$.

Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

2) Dans les cas suivants, les suites (u_n) et (v_n) ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ? Justifier les réponses.

a) $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$;

b) $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1) + \dfrac{1}{n}$;

c) $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

3) On considère un nombre réel a positif et les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entier naturel n non nul par : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln\left(a + \dfrac{1}{n}\right)$.

Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes ?

EXERCICE 3 : (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

1) Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à :

- $\frac{21}{40}$
- $\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{1}{3}$
- $\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{1}{3}$

2) De la même urne, on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs avec remise. La probabilité d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égale à:

- $\frac{3^3\times 7^2}{10^5}$
- $\binom{5}{2}\times\left(\frac{3}{10}\right)^2\times\left(\frac{7}{10}\right)^3$
- $\binom{5}{2}\times\left(\frac{3}{10}\right)^3\times\left(\frac{7}{10}\right)^2$

3) De la même urne, on tire une seule boule. Si elle est blanche, on lance un dé cubique (dont les faces sont numérotées de 1 à 6). Si la boule est noire, on lance un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). On suppose les dés bien équilibrés. Le joueur gagne s'il obtient le numéro 1. Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est égale à:

- $\frac{7}{60}$
- $\frac{14}{23}$
- $\dfrac{\frac{7}{10}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}$

4) On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un nombre réel strictement positif). La probabilité de l'événement $[1 \leq X \leq 3]$ est égale à :

- $e^{-\lambda}-e^{-3\lambda}$
- $e^{-3\lambda}-e^{-\lambda}$
- $\frac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}}$

EXERCICE 4 : (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans tout l'exercice, $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique : 4 cm)

On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$.

1) On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point d'affixe $-\overline{z} + 2$.

a) Déterminer les images respectives par la transformation T du point A et du point Ω d'affixe $1 + i\sqrt{3}$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.

c) Déterminer l'image par la transformation T du cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1.

2) $(\mathscr{C}')$ désigne le cercle de centre O' d'affixe 2 et de rayon 1.

a) Construire le point A' appartenant au cercle $(\mathscr{C}')$ tel que : $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A'}\right) = \frac{\pi}{3}$ [modulo 2π].

b) À tout point M du cercle $(\mathscr{C})$ d'affixe z, on associe le point M' du cercle $(\mathscr{C}')$ d'affixe z' tel que : $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}\right) = \frac{\pi}{3}$ [modulo 2π].

Déterminer le module et un argument de $\frac{z' - 2}{z}$. En déduire que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2$.

c) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2$.

3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
À tout point M du plan, on associe le point M_1 milieu du segment $[MM']$.
Quel est le lieu géométrique du point M_1 lorsque M décrit le cercle $(\mathscr{C})$.

ANNEXE 1 (Exercice 1)
(à rendre avec la copie)