BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Asie

EXERCICE 1

Question 1.	**Réponse a)**
Question 2.	**Réponse c)**
Question 3.	**Réponse b)**
Question 4.	**Réponse b)**
Question 5.	**Réponse c)**
Question 6.	**Réponse c)**
Question 7.	**Réponse a)**
Question 8.	**Réponse b)**

1. $GB = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ et $BI = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$. Donc le triangle GBI est isocèle en B. La bonne réponse est la réponse a). On note que $GI = 2$ de sorte que le triangle GBI n'est pas équilatéral. On note aussi que $GB^2 + BI^2 = 6 \neq BI^2$ et donc le triangle GBI n'est pas rectangle en B.

2. Notons M le barycentre du système $\{(O,2),(A,-1),(C,1)\}$. Alors $2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ et donc

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OJ}.$$

Ainsi, $M = J$ et la bonne réponse est la réponse c).

3. $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{FC} = (0-1)(1-1) + (1-0)(2-2) + (1-0)(0-1) = -1$. La bonne réponse est la réponse b).

4. $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(0,1,0)$ de même que le vecteur $\overrightarrow{HI}$. Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{HI}$ sont égaux et donc le quadrilatère BCIH est un parallélogramme. La réponse a) est fausse.
Ensuite, $HI = 1$ et $BH = \sqrt{2}$. Donc le quadrilatère BCIH n'est pas un carré et la réponse c) est fausse. On en déduit que la réponse d) est vraie ce qui est effectivement le cas car $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH} = 0\times(-1) + 1\times 0 + 0\times 1 = 0$.

5. La droite (KE) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{KE}$ de coordonnées $(1,-1,1)$. Donc seule la représentation paramétrique de la réponse c) est possible. Plus précisément si $t = 0$, on obtient le point de coordonnées $(1,1,1)$ c'est-à-dire le point E et si $t = 1$, on obtient le point de coordonnées $(0,2,0)$ c'est-à-dire le point K. La bonne réponse est donc la réponse c).

6. Les coordonnées du point G ne vérifient ni l'équation de la réponse a) ni l'équation de la réponse b). Donc la bonne réponse est la réponse c).
On note que les coordonnées des points B, G et K vérifient effectivement l'équation $x + y + 2z = 2$ ce qui confirme le résultat.

7. Déterminons une équation cartésienne du plan (ADH). On la cherche sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b et c sont trois réels non tous nuls.
• $ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow d = -a$. Le plan (ADH) admet donc des équations de la forme $ax + by + cz - a = 0$.
• $ax_D + by_D + cz_D - a = 0 \Rightarrow a + c - a = 0 \Rightarrow c = 0$. Le plan (ADH) admet donc des équations de la forme $ax + by - a = 0$.
• $ax_H + by_H - a = 0 \Rightarrow b - a = 0 \Rightarrow a = b$. Le plan (ADH) admet donc des équations de la forme $a(x + y - 1) = 0$.

En choisissant par exemple $a = 1$, on obtient une équation cartésienne du plan (ADH) à savoir $x + y - 1 = 0$. Par suite,

$$d\left(C, (ADH)\right) = \frac{|x_C + y_C - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

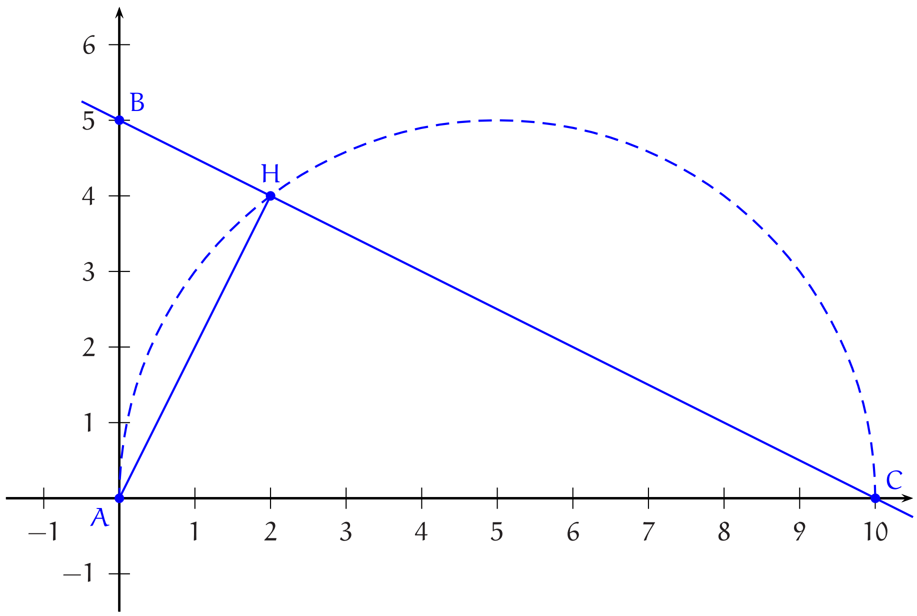
La bonne réponse est la réponse a).

8. L'aire du triangle JKB est la moitié de l'aire du carré $BCKJ$ et est donc égale à $\frac{1}{2}$. Puisque la droite (JH) est perpendiculaire au plan (BJK), le volume du tétraèdre $HJBK$ est

$$\frac{1}{3} \times \text{aire de } (BJK) \times HJ = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

La bonne réponse est la réponse b).

EXERCICE 2



1. a) $c - b = 10 - 5i$ puis $h - b = 2 - i = \frac{1}{5}(c - b)$. Donc, $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires. Par suite, les points B, C et H sont alignés ou encore

$$\boxed{\text{le point H appartient à la droite (BC).}}$$

b) $\frac{h}{h-c} = \frac{2+4i}{-8+4i} = \frac{1+2i}{2(-2+i)} = \frac{-i(i-2)}{2(-2+i)} = -\frac{i}{2}$. Par suite,

$$\left(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}\right) = \arg\left(\frac{0-h}{c-h}\right) = \arg\left(\frac{h}{h-c}\right) = \arg\left(-\frac{i}{2}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

$$\boxed{\left(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].}$$

En particulier, la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (BC) et donc les triangles CHA et AHB sont rectangles en H.

2. a) • $\frac{BH}{AH} = \left|\frac{h-b}{h}\right| = \left|\frac{2-i}{2+4i}\right| = \left|\frac{2-i}{2i(-i+2)}\right| = \frac{1}{2|i|} = \frac{1}{2}$.

• $\frac{BA}{AC} = \left|\frac{-b}{c}\right| = \left|-\frac{5i}{10}\right| = \frac{|i|}{2} = \frac{1}{2}$.

• Enfin, $\frac{AH}{CH} = \left|\frac{h-0}{h-c}\right| = \left|-\frac{i}{2}\right| = \frac{|i|}{2} = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\frac{BH}{AH} = \frac{BA}{BC} = \frac{AH}{CH} = \frac{1}{2}.}$$

b) Puisque $\frac{BH}{AH} = \frac{AH}{CH} = \frac{BA}{AC}$, les triangles CHA et AHB sont semblables et il existe donc une similitude S_1 transformant le triangle CHA en le triangle AHB. Cette similitude transforme l'hypothénuse [AC] du triangle ACH en l'hypothénuse [AB] du triangle ABH et le petit côté [AH] du triangle ACH en le petit côté [BH] du triangle ABH. On a donc $S_1(C) = A$, $S_1(A) = B$ et $S_1(H) = H$.
Enfin, l'angle $\left(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ est transformé en l'angle $\left(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}\right)$ avec

$$\left(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}\right) = \arg\left(\frac{b-h}{a-h}\right) = \arg\left(\frac{-2+i}{-2-4i}\right) = \arg\left(\frac{-2+i}{2i(i-2)}\right) = \arg\left(-\frac{i}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Ainsi, S_1 a conservé au moins un angle orienté et donc S_1 est une similitude directe.

c) Soient α et β deux nombres complexes puis S_1 la similitude directe d'expression complexe $z' = \alpha z + \beta$.

$$\left\{\begin{array}{l} S_1(C) = A \\ S_1(A) = B \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha \times 10 + \beta = 0 \\ \alpha \times 0 + \beta = 5i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = 5i \\ \alpha = -\dfrac{5i}{10} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = 5i \\ \alpha = -\dfrac{i}{2} \end{array}\right. .$$

$$\boxed{S_1 \text{ est la similitude directe d'expression complexe } z' = -\frac{i}{2}z + 5i.}$$

On sait déjà que S_1 est une similitude directe de centre H car $S_1(H) = H$. Le rapport de S_1 est $\dfrac{S_1(C)S_1(H)}{CH} = \dfrac{AH}{CH} = \dfrac{1}{2}$ et l'angle de S_1 est $\left(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HS_1(C)}\right) = \left(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

$$\boxed{S_1 \text{ est la similitude de centre } H, \text{ de rapport } \frac{1}{2} \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{2}.}$$

3. (On rappelle que « la recherche des éléments caractérisant une similitude indirecte est hors programme ».)
Si S_2 est la composée d'une symétrie orthogonale $S_{(\Delta)}$ d'axe (Δ) et d'une similitude directe S dont le centre Ω appartient à (Δ) (c'est-à-dire $S_2 = S_{(\Delta)} \circ S$), Ω est nécessairement invariant par S_2 car invariant par S et $S_{(\Delta)}$.
Déterminons donc les points invariants par S_2. Soient x et y deux réels puis $z = x + iy$ et M le point d'affixe z.

$$\begin{aligned} S_2(M) = M &\Leftrightarrow z = (-1-2i)\overline{z} + 10 \Leftrightarrow x + iy = (-1-2i)(x-iy) + 10 \Leftrightarrow x + iy = -x - 2y - 2ix + iy + 10 \\ &\Leftrightarrow 2x + 2y - 10 + 2ix = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 5 \Leftrightarrow z = 5i \Leftrightarrow M = B. \end{aligned}$$

Ainsi, la similitude S_2 admet un unique point invariant à savoir B.

Soit alors (Δ) une droite quelconque passant par B. La transformation $S = S_{(\Delta)} \circ S_2$ est la composée de deux similitudes indirectes et est donc une similitude directe. Puisque $S(B) = S_{(\Delta)}(S_2(B)) = S_{(\Delta)}(B) = B$, S est une similitude directe de centre B. De plus,

$$S = S_{(\Delta)} \circ S_2 \Rightarrow S_{(\Delta)} \circ S = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)} \circ S_2 = \mathrm{Id} \circ S_2 = S_2.$$

Donc $S_2 = S_{(\Delta)} \circ S$ où S est une similitude directe dont le centre B appartient à (Δ). On peut par exemple choisir $(\Delta) = (AB) = (Oy)$. Dans ce cas, l'expression complexe de $S_{(\Delta)}$ est $z' = -\overline{z}$ puis l'expression complexe de $S = S_{(\Delta)} \circ S_2$ est

$$z' = -\overline{((-1-2i)\overline{z} + 10)} = (1-2i)z - 10.$$

4. a) S_1 est une similitude de rapport $k_1 = \dfrac{1}{2}$ et S_2 est une similitude de rapport $k_2 = \sqrt{5}$. Donc $S_2 \circ S_1$ est une similitude de rapport $k_2 \times k_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

b) • $S_1(A) = B$ et $S_2(B) = B$. Donc $S_2 \circ S_1(A) = B$.
• $S_1(C) = A$ et $S_2(A) = C$. Donc $S_2 \circ S_1(C) = C$.
• $S_1(H) = H$ et $S_2(H) = A$. Donc $S_2 \circ S_1(H) = A$.

Finalement la similitude $S_2 \circ S_1$ transforme le triangle CHA en le triangle BAC. On en déduit que aire de$(BAC) = k^2 \times$ aire de(CHA) et donc que

$$\boxed{\frac{\text{aire de}(BAC)}{\text{aire de}(CHA)} = \frac{5}{4}.}$$

EXERCICE 3

1. **a)** L'événement A est l'événement $V_2 \cap V_3$. Puisque $p_1 = 1$, on a $p(V_2) = 0,6$ et $p\left(\overline{V_2}\right) = 1 - p(V_2) = 0,4$. Ensuite,

$$p\left(V_2 \cap V_3\right) = p(V_2) \times p_{V_2}\left(V_3\right) = 0,6 \times 0,6 = 0,36.$$

b) De même,

$$p\left(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,4 \times 0,9 = 0,36.$$

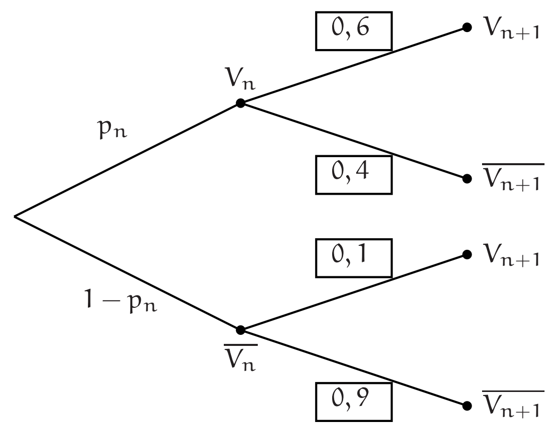
$$\boxed{p\left(A\right) = 0,36 \text{ et } p\left(B\right) = 0,36.}$$

2. On a aussi $p\left(\overline{V_2} \cap V_3\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}(V_3) = p\left(\overline{V_2}\right) \times \left(1 - p_{\overline{V_2}}(\overline{V_3})\right) = 0,4 \times (1 - 0,9) = 0,04$. Mais alors, d'après la formule des probabilités totales,

$$p_3 = p\left(V_2 \cap V_3\right) + p\left(\overline{V_2} \cap V_3\right) = 0,36 + 0,04 = 0,4.$$

$$\boxed{p_3 = 0,4.}$$

3.



4. Soit n un entier naturel non nul. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p(V_{n+1}) = p\left(V_n \cap V_{n+1}\right) + p\left(\overline{V_n} \cap V_{n+1}\right) = p(V_n) \times p_{V_n}(V_{n+1}) + p\left(\overline{V_n}\right) \times p_{\overline{V_n}}(V_{n+1}) \\ &= 0,6p_n + 0,1(1 - p_n) = 0,6p_n + 0,1 - 0,1p_n = 0,5p_n + 0,1. \end{aligned}$$

5. **a)** Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5(p_n - 0,2) = 0,5u_n.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,2 = 0,8$.

b) On en déduit que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,8 \times (0,5)^{n-1}$ puis que $p_n = u_n + 0,2 = 0,2 + 0,8 \times (0,5)^{n-1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n = 0,2 + 0,8 \times (0,5)^{n-1}.}$$

c) Puisque $-1 < 0,5 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. Par suite,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = 0,2.}$$

EXERCICE 4

Partie A

1. Etude des limites

a) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$. D'autre part, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et finalement

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty.}$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to 0} e^{X} = 1$. D'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et finalement

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

c) On en déduit que les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$, c'est-à-dire les deux axes de coordonnées, sont asymptotes à la courbe représentative de f.

2. Etude des variations de la fonction f

a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times \left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right) = \left(-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ f'(x) = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1).}$$

b) Pour tout réel $x > 0$, on a $\dfrac{1}{x^4} > 0$ et $e^{\frac{1}{x}} > 0$ et $2x + 1 > 0$. Donc, pour tout réel $x > 0$, on a $f'(x) < 0$. On en déduit le tableau de variation de la fonction f.

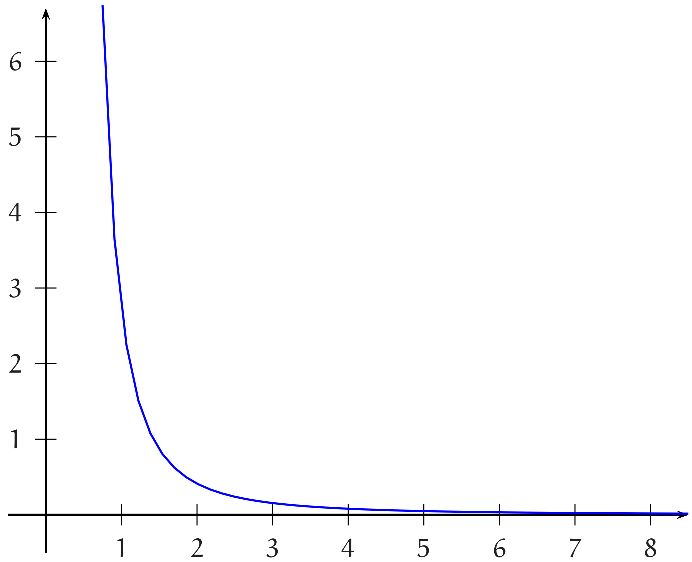
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$ 0

c) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que pour tout réel k de l'intervalle $\displaystyle\left]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)\right[=]0, +\infty[$, l'équation $f(x) = k$ a une solution et une seule dans $]0, +\infty[$. En particulier, l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α dans $]0, +\infty[$.

La machine donne $f(1,105) = 2,02\ldots > 2$ et $f(1,11) = 1,99\ldots$ Donc $f(1,105) > f(\alpha) > f(1,11)$. Comme f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $1,105 < \alpha < 1,11$ et donc que

$$\boxed{\alpha = 1,11 \text{ arrondi au centième.}}$$

3.


6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
6
7
8

Partie B

1. La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $[1, 2]$ et donc I_2 existe. De plus,

$$I_2 = \int_1^2 -\left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}}\ dx = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -e^{\frac{1}{2}} + e^1 = e - \sqrt{e}.$$

$$\boxed{I_2 = e - \sqrt{e}.}$$

2. Une relation de récurrence

a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1ère solution. Pour x dans $[1, 2]$, posons $u(x) = e^{\frac{1}{x}}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1, 2]$ et pour x dans $[0, 2]$ on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = e^{\frac{1}{x}} & v(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} \\ u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} & v'(x) = \dfrac{1}{x^n} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[1, 2]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)\ dx = \frac{1}{1-n}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^{n-1}} - e^1\right) + \frac{1}{1-n}\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}\ dx \\ &= \frac{1}{1-n}\left(\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - e + I_{n+1}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que $(1-n)I_n = \dfrac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - e + I_{n+1}$ puis que $I_{n+1} = e - \dfrac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \geqslant 2,\ I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n.}$$

2ème solution (une intégration par parties un peu plus astucieuse). $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^2 \left(-\frac{1}{x^{n-1}}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)\ dx$. On pose donc $u(x) = -\dfrac{1}{x^{n-1}}$, $u'(x) = \dfrac{n-1}{x^n}$, $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ et $v(x) = e^{\frac{1}{x}}$. On obtient

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^2 u(x)v'(x)\ dx = \left[-\frac{1}{x^{n-1}}e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{n-1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\ dx \\ &= -\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + e - (n-1)I_n = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n. \end{aligned}$$

b) En particulier, $I_3 = e - \dfrac{\sqrt{e}}{2^1} + (1-2)I_2 = e - \dfrac{\sqrt{e}}{2} - (e - \sqrt{e}) = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$.

$$\boxed{I_3 = \frac{\sqrt{e}}{2}.}$$

3. Etude de la limite de la suite de terme général I_n

a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit x un réel de $[1, 2]$. On a $e^{\frac{1}{x}} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^n} \geqslant 0$ et donc $\dfrac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \geqslant 0$. D'autre part, $\dfrac{1}{x} \leqslant 1$ et, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $e^{\frac{1}{x}} \leqslant e^1 = e$. En multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par le réel positif $\dfrac{1}{x^n}$, on obtient $\dfrac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \leqslant \dfrac{e}{x^n}$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 2 \text{ et tout réel } x \text{ de } [1,2],\ 0 \leqslant \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{e}{x^n}.}$$

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout réel x de $[1,2]$, $\frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \geqslant 0$ et donc par positivité de l'intégrale, $I_n \geqslant 0$.
D'autre part, pour tout réel x de $[1,2]$, $\frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{e}{x^n}$ et donc par croissance de l'intégrale,

$$I_n \leqslant \int_1^2 \frac{e}{x^n}\,dx = e\left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^2 = \frac{e}{n-1}\left(-\frac{1}{2^{n-1}}+1\right) \leqslant \frac{e}{n-1}.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 2,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n-1}.}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n-1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

