BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Antilles Guyane

EXERCICE 1

1)	**B**
2)	**A et B**
3)	**C**
4)	**A et D**

1. Il y a 11 cartes qui sont un as ou un pique car $\text{card}(A \cup P) = \text{card}(A) + \text{card}(P) - \text{card}(A \cap P) = 4 + 8 - 1 = 11$.
Il y a donc $32 - 11 = 21$ cartes qui ne sont ni un as, ni un pique. la probabilité demandée est $\dfrac{21}{32}$ et la réponse B est correcte. D'autre part, les autres propositions sont $\dfrac{20}{32}$, $\dfrac{11}{32}$ et $\dfrac{12}{32}$. Donc, les autres propositions sont fausses.

2. Le nombre de tirages simultanés de 2 cartes parmi 32 est $\dbinom{32}{2} = \dfrac{32 \times 31}{2} = 16 \times 31 = 496$.
Le nombre de tirages simultanés de 2 cartes parmi 21 cartes qui ne sont ni un as, ni un pique est $\dbinom{21}{2} = \dfrac{21 \times 20}{2} = 21 \times 10 = 210$. La probabilité demandée est

$$\frac{\dbinom{21}{2}}{\dbinom{32}{2}} = \frac{210}{496} = \frac{105}{248}.$$

Les réponses A et B sont correctes et donc les réponses C et D sont fausses.

3. La probabilité que la durée d'attente appartienne à l'intervalle $[a, b] \subset [0, 1]$ est $b - a$. Donc la probabilité que l'attente soit comprise entre 15 mn $= \dfrac{1}{4}$ h et 20 mn $= \dfrac{1}{3}$ h est $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$. La réponse C est correcte et les autres ne le sont pas.

4. Si X désigne le nombre d'appareils en panne au bout de la période de garantie, X est régi par une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,15$. La probabilité demandée est

$$p(X = 1) = \binom{10}{1} \times 0,15^1 \times 0,85^9 = 0,85^9 \times 0,15 \times 10.$$

Donc la réponse D est correcte et les réponses B et C ne le sont pas. D'autre part, $0,85^9 \times 0,15 \times 10 = 0,347\ldots = 0,35$ à 10^{-2} près. Donc la réponse A est correcte.

EXERCICE 2

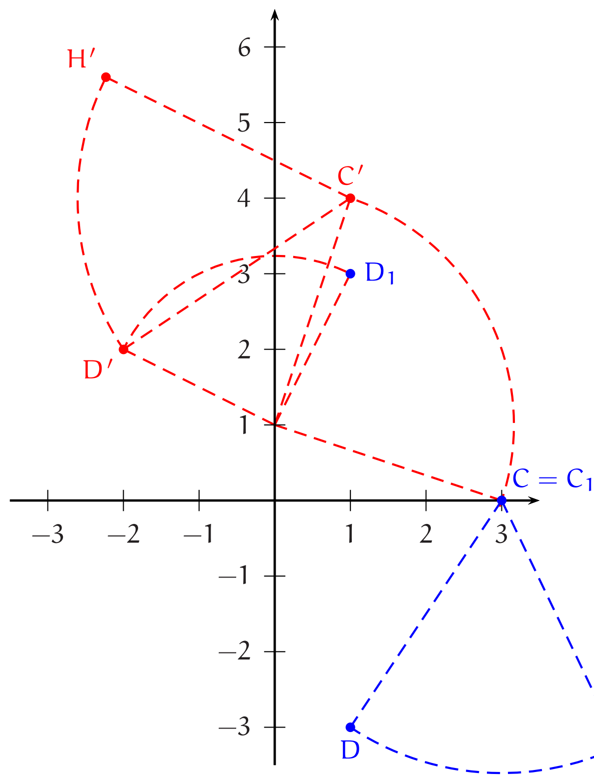
1. Restitution organisée de connaissances

Soient a et b deux nombres complexes tels que $a \neq 0$. Soit $\mathscr{S}$ la similitude d'expression complexe $z' = a\overline{z} + b$.
Soient C, D et E trois points tels que $D \neq C$ et $E \neq C$ et d'affixes respectives c, d et e. On note C', D' et E' les images respectives des points C, D et E par $\mathscr{S}$ et c', d' et e' les affixes respectives des points C', D' et E'. On sait que les points C', D' et E' sont tels que $D' \neq C'$ et $E' \neq C'$ et on a

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{C'D'}, \overrightarrow{C'E'}\right) &= \arg\left(\frac{e'-c'}{d'-c'}\right) = \arg\left(\frac{(a\overline{e}+b)-(a\overline{c}+b)}{(a\overline{d}+b)-(a\overline{c}+b)}\right) = \arg\left(\frac{\overline{e}-\overline{c}}{\overline{d}-\overline{c}}\right) \\ &= \arg\left(\overline{\left(\frac{e-c}{d-c}\right)}\right) = -\arg\left(\frac{e-c}{d-c}\right) = -\left(\overrightarrow{C'D'}, \overrightarrow{C'E'}\right)\ [2\pi].\end{aligned}$$

Donc une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

2. a)



b) Il est connu que l'expression complexe de $\mathscr{S}_1$ est $z' = \overline{z}$.

3. a) Soient a et b deux nombres complexes, $a \neq 0$, puis $\mathscr{S}_2$ la similitude directe d'expression complexe $z' = az + b$.

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l}\mathscr{S}_2(C_1) = C' \\ \mathscr{S}_2(D_1) = D'\end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}3a + b = 1 + 4i \\ (1+3i)a + b = -2 + 2i\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}b = -3a + 1 + 4i \\ (1+3i)a + (-3a + 1 + 4i) = -2 + 2i\end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(-2+3i)a = -3 - 2i \\ b = -3a + 1 + 4i\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a = \dfrac{i(3i-2)}{-2+3i} \\ b = -3a + 1 + 4i\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a = i \\ b = 1 + i\end{array}\right.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'expression complexe de } \mathscr{S}_2 \text{ est } z' = iz + 1 + i.}$$

b) Puisque $|a| = |i| = 1$ avec $a \neq 1$, on sait que $\mathscr{S}_2$ est une rotation. Son angle a pour mesure un argument de i c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{2}$. Son centre Ω d'affixe ω est l'unique point invariant de $\mathscr{S}_2$. Or

$$\omega = i\omega + 1 + i \Leftrightarrow (1-i)\omega = 1 + i \Leftrightarrow \omega = \frac{1+i}{1-i} \Leftrightarrow \omega = \frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} \Leftrightarrow \omega = \frac{1+2i-1}{1^2+1^2} \Leftrightarrow \omega = i.$$

$$\boxed{\mathscr{S}_2 \text{ est la rotation de centre } \Omega(0,1) \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$$

4. Si on note z_1 l'affixe de $M_1 = \mathscr{S}_1(M)$ et z' l'affixe de $M' = \mathscr{S}(M) = \mathscr{S}_2(M_1)$, on a $z' = iz_1 + 1 + i = i\overline{z} + 1 + i$.

$$\boxed{\text{L'expression complexe de } \mathscr{S} \text{ est } z' = i\overline{z} + 1 + i.}$$

5. **a)** D'après la question 3.a), $\mathscr{S}(C) = C'$ et $\mathscr{S}(D) = D'$.

b) H est l'image du point D dans la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Donc le triangle CDH est équilatéral direct.

c) $\mathscr{S}$ est la composée de deux isométries et donc $\mathscr{S}$ est une isométrie. On en déduit que le triangle $C'D'H'$ est équilatéral car le triangle CDH l'est. De plus, $\mathscr{S}$ transforme un angle orienté en son opposé et donc

$$\boxed{\text{le triangle } C'D'H' \text{ est équilatéral indirect.}}$$

Le point H' est alors l'image du point D' par la rotation de centre C' et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Voir figure.

EXERCICE 3

1. a) $F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$.

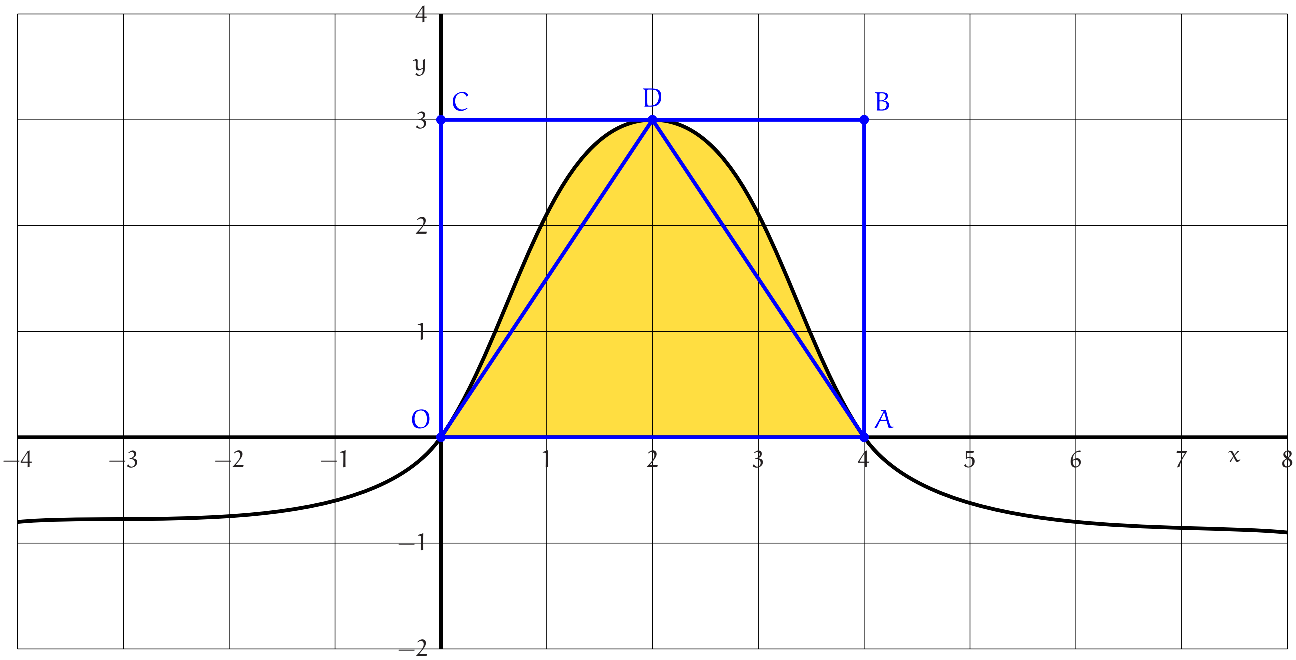
b) • Soit $x \in]0, 4]$. Le graphique montre que la fonction f est positive sur $[0, 4]$. En particulier, pour tout réel $t \in [0, x]$, $f(t) \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale on en déduit que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \geqslant 0$. Ceci reste vrai pour $x = 0$ car $F(0) = 0$.

• Soit $x \in [-3, 0]$. Le graphique montre que la fonction f est négative sur $[-3, 0]$. En particulier, pour tout réel $t \in [x, 0]$, $f(t) \leqslant 0$. On en déduit que $\int_x^0 f(t)\,dt \leqslant 0$ puis que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = -\int_x^0 f(t)\,dt \geqslant 0$.

En résumé,

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de } [-3, 4],\ F(x) \geqslant 0.}$$

c) La fonction f est positive sur l'intervalle $[0, 4]$. Donc $F(4)$ est l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 4$.



$F(4)$ est plus petit que l'aire du rectangle $OABC$ qui est égale à $4 \times 3 = 12$ et $F(4)$ est plus petit que l'aire du triangle OAD qui est égale à $\frac{4 \times 3}{2} = 6$. Donc

$$\boxed{6 \leqslant F(4) \leqslant 12.}$$

2. a) La fonction f est continue sur l'intervalle $[-3, 8]$. On sait alors que la fonction F est la primitive de la fonction f qui s'annule en 0. En particulier, F est dérivable sur $[-3, 8]$ et $F' = f$.

$$\boxed{f \text{ est la dérivée de } F.}$$

b) La fonction $f = F'$ est strictement négative sur $[-3, 0[$, strictement positive sur $]0, 4[$ et négative sur $]4, 8]$. Donc la fonction F est strictement décroissante sur $[-3, 0]$, strictement croissante sur $[0, 4]$ et strictement décroissante sur $[4, 8]$.

3. Les deux courbes représentées sont les graphes de fonctions décroissantes sur $[-3, 0]$, croissantes sur $[0, 4]$ et décroissantes sur $[4, 8]$. La fonction représentée par la courbe A ne s'annule pas en 0 contrairement à F (d'après la question 1.a)). La courbe A ne peut donc représenter la fonction F. D'après la question 1.c), on a $6 \leqslant F(4) \leqslant 12$. La fonction représentée par la courbe B prend en 4 une valeur inférieure à 5. Donc, la courbe B ne peut représenter la fonction F. Finalement

$$\boxed{\text{aucune des deux courbes ne peut représenter la fonction } F.}$$

EXERCICE 4

Partie A

1. • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = 0$.

• Pour tout réel $x > 0$, $g(x) = x(1 - \ln x)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - \ln x) = -\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.}$$

2. La fonction $x \mapsto x\ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et donc la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$. De plus, pour $x > 0$,

$$g'(x) = 1 - \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ g'(x) = -\ln x.}$$

3. Par suite, pour $x \in]0, 1[$, $g'(x) > 0$ et pour $x \in]1, +\infty[$, $g'(x) < 0$ et donc la fonction g est strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations de g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g			1		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Partie B

1. Donnons les premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

n	u_n
1	$2,718\ldots$
2	$1,847\ldots$
3	$0,743\ldots$
4	$0,213\ldots$
5	$0,047\ldots$
6	$0,008\ldots$

a) Il semble que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit décroissante.

b) Il semble que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_n = \ln\left(\frac{e^n}{n^n}\right) = \ln(e^n) - \ln(n^n) = n\ln(e) - n\ln(n) = n - n\ln(n).$$

b) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = g(n)$. On a vu à la question 3 de la partie A que la fonction g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Si n est un entier supérieur ou égal à 1, on a $1 \leqslant n < n+1$ et donc $g(n) > g(n+1)$ ou encore $v_n > v_{n+1}$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul, on a $v_n > v_{n+1}$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante.}}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a

$$u_n = e^{v_n} > e^{v_{n+1}} = u_{n+1}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul, on a $u_n > u_{n+1}$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante.}}$$

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive. Donc, pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_1 = e$. Donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée.}}$$

4. Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = e^{g(n)}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

